SÉRIE A,
N· D'ORDRE

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Alex ROSENGARD

PREMIÈRE THÈSE

Contribution à l'étude des liaisons limites entre différentes statistiques d'un échantillon

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Approximation linéarisée des mouvements supersoniques coniques

Soutenues le 11 février 1966 devant la Commission d'examen

MM. DUGUE — Président

GEFFROY, ROSEAU — Examinateurs

SÉRIE A,
N· D'ORDRE

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Alex ROSENGARD

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK - LEIDEN -

PREMIÈRE THÈSE

Contribution à l'étude des liaisons limites entre différentes statistiques d'un échantillon

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Approximation linéarisée des mouvements supersoniques coniques

Soutenues le 11 février 1966 devant la Commission d'examen

MM. DUGUE — Président

GEFFROY, ROSEAU — Examinateurs

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen

M. ZAMANSKY

Professeurs

MM.	BRELOT	T Analyse supérieure
	PRENANT	T anatomie et histologie comparée
	GRASSE	T évolution des êtres organisés
	PREVOST	T chimie organique
	WYART	T Minéralo. & cristallo
	TEISSIER	T zoologie
	MANGENOT	T biologie végé. (Orsay)
	AUGER	T physique quantique et relativité
	MONNIER	T physiologie générale
	PIVETEAU	T Paléontologie
	ROCARD	T physique ENS
	CARTAN	T mathématiques ENS
	LAFFITTE	T chimie générale
	N...	T géométrie supérieure
	COULOMB	T physique du globe
Mle	COUSIN	T biologie animale SPCN
MM.	CHRETIEN	T chimie minérale
	BOCQUET	T zoologie
	KASTLER	T physique ENS
	EPHRUSSI	T génétique
	RIVIERE	T géologie SPCN & sédiment. (Orsay)
	GAUTHERET	T biologie végétale PCB
	LUCAS R.	T recherches physiques
	THOMAS A.	T biologie cellulaire
	ARNULF	T optique appliquée
	MORAND	T physique enseignement
	SOLEILLET	T physique PCB
	FORTIER	T Mécanique exp. des fluides
	DRACH	T zoologie
	QUENEY	T météo. & dynamique atmos.
	GALLIEN	T embryologie
	EICHORN	T botanique
	DE CUGNAC	T biologie végétale SPCN
Mle	CAUCHOIS	T chimie physique
MM.	THELLIER	T physique du globe
	L'HERITIER	T biologie générale Orsay
	GRIVET	T radioélectricité Orsay
	PONCIN	T mécanique générale
	DU BREIL	T arith. & théorie des nombres
	QUELET	T chimie organique
	CAGNIARD	T géophysique appliquée
	CHAMPETIER	T chimie macromoléculaire
	CUVILLIER	T micropaléontologie
	JUNG	T géologie
	TRILLAT	T microscopie et diffrac. élec.
	WIEMANN	T chimie organ. & structu.
	JACQUINOT	T spectroscopie et physique céleste (Orsay)
	VASSY	T physique de l'atmosphère
	DESTOUCHES	T théorie physique
	AMIEL	T chimie générale
	HOCART	T minérall. & cristal.
	J. P. MATHIEU	T physique optique
	COUTEAUX	T cytologie
	MAY	T zoologie
	CHOQUET	T théorie des fonctions et topologie
	FELDMANN	T biologie végétale marine
	GUINIER	T physique des solides (Orsay)
	JOST	T physiologie comparée
	FORTET	T calcul des probabilités et physique mathématiques
	SCHWARTZ	T Calcul dif. & Intégral
	CHOUARD	T physiologie végétale
	MALAVARD	T aviation (technique aéron.)
	NORMANT	T synthèse organique
	BENARD	T chimie minérale
	BUVAT	T botanique ENS
	DUGUE	T statistique mathématiques
	SOULAIRAC	T Psychophysiologie
	ULRICH	T Physiologie végé. appli.
	MARECHAL	T Optique théo. & appli.
	KIRRMANN	T théories chimiques
	CHADEFAUD	T botanique
Mle	LE BRETON	T Physio de la nutrition
MM.	LELONG	T appli de l'ana à la géom.
	DEVILLERS	T anatomie & histo. compa.
	EHRESMANN	T topologie algébrique
	FRANCON	T physique SPCN
	GLANGEAUD	T géogra., phys., géol.
	DODEMENT	T mathématiques MGR
	PISOT	T technique math. de la physi.
	ROCH	T géologie
	SCHATZMANN	T astrophysique
	TERMIER	T géologie générale
	ZAMANSKY	T mathématiques générales
	LENNUIER	T Physique MGP
	RIZET	T génétique Orsay
	ROUTHIER	T géologie appliquée
Mme	TONNELAT	T physique théorique
MM.	DIXMIER	T mathématiques MPC
	SOUCHAY	T chimie générale
	AIGRAIN	T électrotechn. géné.
	BRUSSET	T chimie systématique
M.	LEVY	T physique théorique des hautes énergies (Orsay)
Mme	CHAIX	T chimie biologique
Mme	HUREL PY	T biologie végétale PCB
MM.	PANNETIER	T chimie générale
	BRUN	T mécanique des fluides I
	LEDERER	T chimie biologique (Orsay)
Mme	DUBREIL	T mathématiques (agréga)
Mme	LELONG	T math. II ENS
M.	BELLAIR	T géologie SPCN
MM.	COTTE	T physique électricité
	DUBOIS J. E.	T chimie organique
	LAMOTTE	T zoologie ENS
	MICHEL A.	T chimie minérale Orsay
	OLMER	T énergétique générale
	ROUAULT	T électricité (Orsay)
	GAUTHIER	T mécanique appliquée
	BARCHEWITZ	T chimie physique
	BROSSEL	T physique atomique
	BUSER	T physiologie comparée
	CAMUS	T physio. végé.
	CASTAING	T Physique II thermo. (Orsay)
	CURIEN	T minéralo. & cristal.
	MOYSE	T physio. végé. (Orsay)
Mme	CHARNIAUX-COTTON	T évolution des êtres organisés
MM.	POSSOMPES	T zoologie
	PULLMANN	T chimie quantique
	TEILLAC	T physique nuc. et radioactivité (Orsay)
	TONNELAT	T bio. physico. chim. (Orsay)
	VILLE	T économétrie
	WILLEMART	T chimie PCB
	DODE	T chimie (Orsay)
	FREYMANN	T recherches physiques
	GUINOCHET	T biolo. végé. SPCN (Orsay)
	ROLLET	T chimie minérale
Mle	JOSIEN	T chimie SPCN
MM.	CHEVALLEY	T géométrie algébrique et théorie des groupes
	ARNOULT	T électronique Orsay
	CHAPELLE	T physique I (Orsay)
	DELANGE	T mathématiques I (Orsay)
	DENY	T mathé. géné. (Orsay)
	GERMAIN	T mécanique théorique des fluides
	LUCAS	T géologie
	ALLARD	T chimie physique
	BERTHELOT	T physique des particules fondamentales (Orsay)
	BRICARD	T météor. et physique de l'atmosphère
Mme	ALBE FESSARD	T psycho. physio.
MM.	FRIEDEL	T physique des solides (Orsay)
	JULIA	T Etudes des moléculaires complexes
	LENDER	T biologie animale SPCN Orsay
	MAGAT	T physico-chimie des radio-éléments
Mle	QUINTIN	T électrochimie
MM.	MONOD	T chimie du métabolisme
	BENOIT	T physio. animale Orsay
	DE POSSEL	T analyse numérique
	CHARLOT	T chimie analytique
	LEMEE	T écologie végétale Orsay
	GUERIN	T chimie MPC Orsay
	CHATELET	T chimie PCB
	JEAN	T physio. nucléaire Orsay
	MATTLER	T physique SPCN
	BERGERARD	T zoologie Orsay
	BERTEIN	T électronique Orsay
	BOUISSIERES	T radiochimie
Mme	COUTURE	T thermo. et méca. physique
MM.	ELLEMBERGER	T géologie des grandes régions du globe (Orsay)
	FRANC	T biologie animale PCB
	SCHNELL	botanique tropicale
	STLKOWSKI	T physiologie végétale
	ACHER	T chimie biologique
	BAUDOIN	T biologie animale PCB
	BEAUMONT	biologie animale SPCN
	BLAMONT	géophysique ionosphère
	BOUREAU	T botanique
	CURIE D.	physique MGP
	DURAND DELGA	T géologie
	FREON	T chimie organique Orsay
	HELLER	T physiologie végétale
	TORTRAT	T calcul des probabilités
	CAILLEUX	T géologie SPCN
	MAGNAN	physique électricité
	DAUDEL	T mécanique ondulatoire appli. à la chimie théo. & à la phy. nucléaire
Mle	FOURCROY	biologie végétale SPCN
Mme	CHOQUET BRUHAT	mécanique analytique et méca. céleste
Mle	VEIL	T physiologie générale
MM.	LWOFF	T micobiologie
	SIESTRUNCK	T Méca. phys. & experimentale
	LACOMBE	T métallurgie des métaux nucléaires (Orsay)
	BROCHARD	T physique PCB (Orsay)
	CABANNES	T mécanique générale
	LESIEUR	T math. I (Orsay)
	MAZET	T méca. géné. (Orsay)
	CAIRE	géogra. physique et géo dynami
	COMOLET	méca. des fluides
	CORABOEUF	T physio. animale (Orsay)
	DELLOUE	T physique de l'exosphère
	GORENFLOT	botanique II (Orsay)
	HOUILLON	biologie animale PCB
	JULLIEN J.	chimie SPCN (Orsay)
	MALGRANGE	T technique mathé. de la phys. Ors.
	OLIVIER	Antropologie
	NOZERAN	T botanique II (Orsay)
	BLANC-LAPIERRE	T physique ENS (Orsay)
	CHEVAUGEON	T botanique (Orsay)
	KAHANE	T mathématiques (Orsay)
	SAMUEL	T math ENS féminines
	KOURGANOFF	T astronomie (Orsay)
	THIRY	T méca. céleste
	ABELES	physique SPCN
	AMAT	T physique PCB
	AUBOIN	T géologie
Mme	BENOIT-GUEUTAL	T physique nucléaire et radioactivité (Orsay)
MM.	BOUGIS	Biologie marine Villefranche/mer
	BRUHAT	T math. MPC
	BRUNN	T géologie historique Orsay
	CHABBAL	T physique MGP (Orsay)
	DEHEUVELS	T math. propé.
	D'ESPAGNAT	T physique théorique (Orsay)
	FURON	T géologie SPCN
Mme	GANS	T génétique
MM.	GENEVES	biologie végétale PCB
	GUILBERT	physique CUS Orléans
	HUPE	T pétrographie
	HOLLANDE	T biolo. géné.
	LIONS	T analyse numérique
	MAITTE	T chimie PCB
	MEYER	physique propé.
	NICOLAS	géologie appliquée
	PANIGEL	biologie générale
	RAVIER	pétrographie
	ROSEAU	T méca. théorique des fluides
	ROUBINE	électronique
	SILBER	T chimie PCB
	UEBERSFELD	T électronique
	YVON	T théories physiques
	HERVE	T mathématiques
	NERON	T math. MPC (Orsay)
Mme	PECKER WIMEL	T astrophysique
MM.	BALKANSKY	physique MPC
	LE CORRE	T électricité
	DELCROIX	T physique théorique (Orsay)
	GOURDIN	physique théorique (Orsay) des hautes énergies
	LEHMANN	T phys. exp. des hautes énergies
	NATAF	T physique nucléaire et radioactivité (Orsay)
	ECHALIER	biologie animale PCB
	BARRAUD	physiolo. cellulaire
	LIORET	physiologie végé. Orsay
	DARS	géologie structurale & géolo. appli.
	CAMEFORT	T botanique (agrégation)
	VICHNIEWSKY	T mécanique industrielle
	BLAQUIERE	électronique (Orsay)
	ARNOUS	T physique théorique
	TATIBOUET	chimie (CSU Orléans)
	MALLIAVIN	T math. propé. (Orsay)
	GAUDEMAR	chimie propé.
	PEREZ Y JORBA	physique Exp. des Hautes énergies (Orsay)
	DAVID	T chimie (agrégation Orsay)
	BROUSSE	T mécanique théorique
	ROSCH	T astronomie
	GUY	T physique expérimentale
	LAZARD	math MPC
	MOREL Pierre	physique MPC
	ARSAC	programmation
	LEFEBVRE	chimie MPC
	CHAPEVILLE	biochimie
	BENOIT	physique CPEM
	RIO	chimie CPEM
	JAUZEIN	géologie ENS
	PREVOST Georges	BV CPEM
	FAVARD P.	BA CPEM
	VILKAS	chimie CPEM
Mle	FICINI	chimie CPEM
MM.	LEQUEUX	astronomie
	COHEN	physique MPC
	TAVERNIER	physique CPEM
Mme	ROIZEN	physique CPEM
MM.	DURAND M.	BA SPCN
	PASCAUD	physiologie
Mme	PETIT	BA CPEM
MM.	BROUSSE	géologie orsay
	CAGNIAC	physique agrégation Orsay
	LEBERRE	zoologie (Orsay)
	SCHEFFER	microbiologie (Orsay)
	de GENNES	physique des solides (Orsay)
	RIOU	physique nuclé. exp. Orsay
	CLAUSER	chimie biolo. Orsay
	CHEVALIER	physio. animale Orsay
	JANCOVICI	physique atomique Orsay
	FALK-VAIRANT	physique nucléaire Orsay
	FETIZON	chimie propé. Orsay
	CERF	mathématiques Orsay
	LURCAT	physique
	RIGAUDY	chimie S. P. C. N.
	SIGWALT	chimie S. P. C. N.
	FOURNET	électricité générale
	COLLONGUES	chimie C. P. E. N.
	DUBERT	biochimie
	LAVOREL	biologie physico-chimique
	MOREL F.	physiologie comparée
	TALBOT	génétique chimique
Mme	NOUGAREDE	botanique
MM.	FRANCOIS	zoologie
	IVANOFF	océanographie physique
	CADIOT	chimie organique
	BARUCH	physique propédeutique
	NOZIERES	physique générale
	BOK	physique propédeutique
	SLONIMSKI	génétique
	KRASNER	T mathématiques
	BENZECRI	T statistiques
	VINH MAU	physique M. G. P.
	DUQUESNES	physique C. P. EM.
	SCHUTZENBERGER	programmation
	TREMILLON	chimie MPC
	FAYARD	chimie MPC
	BUVET	chimie CPEM
	AUTHIER	physique MPC
	PICINBONO	T physique CPEM
	BONNEFILLE	électrotechnique
Mme	PUISEUX DAO	biologie végétale

le secrétaire général

R. POULAIN

INTRODUCTION

L'origine de ce travail a été suggérée par certains travaux de F. BASTENAIRE ; l'étude des théories concernant la fatigue des métaux nécessite en particulier la connaissance de la liaison limite entre certaines statistiques, par exemple la moyenne et les valeurs extrêmes ; des résultats partiels ont été obtenus au moyen du coefficient de corrélation par F. BASTENAIRE ; nous avons envisagé de les généraliser et de les compléter en étudiant les liaisons limites entre les statistiques d'ordre, et entre les statistiques d'ordre et la moyenne d'un échantillon.

Dans le premier chapitre, il nous a semblé nécessaire d'introduire les différentes définitions de l'indépendance limite, notamment à partir des travaux de J. GEFFROY. Nous essayons de présenter quelques propriétés de ces indépendances asymptotiques généralisant les propriétés de l'indépendance, et de donner quelques résultats nécessaires à la suite du travail. Ce travail est fait dans le cas particulier des variables aléatoires à valeurs dans R^n, cas qui est celui de la statistique classique. Nous avons cependant esquissé en annexe ce que deviennent ces définitions dans un cas plus général, celui des variables aléatoires à valeurs dans un espace métrique ; nous avons ainsi pu généraliser un théorème classant les différentes définitions de l'indépendance limite.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des liaisons entre statistiques d'ordre. Nous donnons par exemple une condition nécessaire et suffisante d'indépendance limite en probabilité entre deux statistiques d'ordre, généralisant ainsi, avec des méthodes différentes certains résultats récents (KREM, ROSSBERG). Nous donnons aussi une condition nécessaire et suffisante d'indépendance limite presque complète, généralisant ainsi aux statistiques d'ordre le résultat donné par J. GEFFROY sur les valeurs extrêmes.

Le troisième et le quatrième chapitre visent à donner des réponses aussi complètes que possible aux questions posées par F. BASTENAIRE. On donne des conditions suffisantes pour l'indépendance limite entre valeurs extrêmes généralisées et moyenne (en probabilité et presque complètement) et sur la liaison limite entre moyenne et quantiles. On voit ainsi, en tenant aussi compte des résultats du chapitre V, que quantiles et valeurs extrêmes ont un comportement opposé avec la moyenne, la transition entre l'indépendance et la liaison limite correspondant au cas où la moyenne converge en loi vers la loi normale, la variance de l'échantillon étant infinie.

Le chapitre V, qui reprend notre thèse de 3ème Cycle, étudie systématiquement le problème suivant : à partir des différentes lois limites des valeurs extrêmes, trouver celle des moyennes, et la liaison limite entre les extrêmes et la moyenne. On retrouve, dans ce cas particulier, les résultats plus généraux annoncés dans les chapitres précédents, et on voit la manière dont évolue la liaison entre la moyenne et les extrêmes quand la distribution initiale a des moments finis d'ordre de moins en moins élevés. On retrouve ainsi les différentes formes limites de la moyenne (lois de Paul LEVY).

Qu'il me soit permis de remercier ici très chaleureusement Monsieur le Professeur DUGUE de tout l'intérêt et de toute l'aide qu'il m'a apportés dans ce travail, et Monsieur le Professeur GEFFROY, qui a bien voulu relire le manuscrit, de tous les conseils et de toutes les suggestions qu'il m'a faites au cours de mes recherches.

Je remercie également beaucoup le Commissariat à l'Energie Atomique et en particulier Monsieur FREJACQUES et Monsieur MASSIGNON, qui m'ont permis d'achever et de mener à bien ce travail.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546822_0017

CHAPITRE I

GÉNÉRALITÉS SUR L'INDÉPENDANCE ASYMPTOTIQUE

I.1 - LOI LIMITE ET INDEPENDANCE ASYMPTOTIQUE LEGALE

I.1.1 - Définition d'une loi limite

Soit une suite de v.a. $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ ayant pour f.r. $F_1(x), \ldots, F_n(x), \ldots$ On dit que cette suite de v.a. admet une loi limite s'il existe une suite de constantes $a_n > 0$ et b_n, telles que :

$$\lim_{n\to\infty} F_n(a_n x + b_n) = \Phi(x) \tag{I.1}$$

où $\Phi(x)$ est une f.r. "propre" (c'est-à-dire ni unitaire, ni dégénérée), la convergence ayant lieu pour tout x appartenant à l'ensemble de continuité de $\Phi(x)$.

On écrira :

$$F_n(a_n x + b_n) \xrightarrow[\mathcal{L}]{} \Phi(x) \tag{I.2}$$

I.1.2 - Théorème de Khintchine

On dit que deux f.r. $F(x)$ et $F^*(x)$ sont du même type s'il existe deux constantes $a > 0$ et b telles que pour tout x :

$$F^*(x) = F(ax + b) \tag{I.3}$$

THEOREME I.1 - Etant donné une suite de f.r. $F_n(x)$, s'il existe deux suites de constantes a_n et α_n positives, et deux autres b_n et β_n telles que :

$$\begin{aligned} F_n(a_n x + b_n) &\xrightarrow[\mathcal{L}]{} \Phi(x) \\ F_n(\alpha_n x + \beta_n) &\xrightarrow[\mathcal{L}]{} \Psi(x) \end{aligned} \tag{I.4}$$

où Φ et Ψ sont des f.r. propres, on peut dire que Φ et Ψ sont du même type.

On pourra trouver la démonstration de ce résultat dans GEFFROY [7] ou dans LOEVE [15]. Son intérêt réside dans le fait que, si on a trouvé un système de constantes conduisant à une loi-limite, tout autre système ne peut conduire (s'il conduit à une loi-limite) qu'à une loi du même type.

Ce qui vient d'être énoncé se généralise sans difficulté au cas de suites de v.a. à plusieurs dimensions.

I.1.3 - Indépendance asymptotique légale

Considérons deux suites de v.a. X_n et Y_n. On dira que X_n et Y_n sont asymptotiquement légalement indépendantes si elles ont une loi-limite jointe de la forme $A(x)\,B(y)$.

La généralisation à plus de deux v.a. est immédiate.

Cette définition très employée de l'indépendance asymptotique suppose l'existence d'une loi-limite. Or l'idée d'indépendance limite est plus large que celle impliquée par la définition. C'est ce qui mène à d'autres définitions de l'indépendance asymptotique (nous dirons aussi "indépendance limite").

I.2 - L'INDEPENDANCE ASYMPTOTIQUE UNIFORME

I.2.1 - Définition

On dira que deux suites de v.a. X_n et Y_n sont asymptotiquement uniformément indépendantes si :

$$F_n(x, y) - A_n(x)\, B_n(y) \longrightarrow 0 \qquad (I.5)$$

uniformément avec $1/n$ (on écrira $\vec{u}$).

On a pris ici :

$$F_n(x, y) = \text{Prob}\,[X_n < x,\ Y_n < y]$$

$$A_n(x) = \text{Prob}\,[X_n < x]$$

$$B_n(y) = \text{Prob}\,[Y_n < y]$$

pour désigner les f.r. jointes et marginales du couple (X_n, Y_n).

Cette définition a été introduite par GEFFROY [7] et se généralise immédiatement à un nombre fini de v.a., ou encore à des v.a. de dimensions finies (vecteurs aléatoires).

I.2.2 - Propriétés de l'indépendance limite uniforme

L'uniformité de la convergence permet de donner des résultats que nous présenterons comme des théorèmes, car ils nous serviront dans la suite.

THEOREME I.2 - Si X_n et Y_n sont asymptotiquement uniformément indépendantes, on a :

$$\text{Prob}\,[(X_n, Y_n) \in a_1 \times a_2] - \text{Prob}\,[X_n \in a_1]\ \text{Prob}\,[Y_n \in a_2] \underset{u}{\longrightarrow} 0 \qquad (I.6)$$

où a_1 et a_2 sont des intervalles quelconques de la droite.

Ce théoreme s'étend d'ailleurs à tout ensemble résultant d'un nombre borné d'opérations portant sur les intervalles. La réciproque est évidente.

L'hypothèse nous permet d'affirmer la propriété pour tous les intervalles du type :

$$a_1 = [-\infty,\ x[$$

donc du type

$$a_1 = [-\infty,\ x+\varepsilon[$$

où $\varepsilon \longrightarrow 0$ par valeurs positives.

La convergence uniforme montrant la propriété pour tout ε, on voit que (I.6) est encore vraie avec :

$$a_1 = [-\infty,\ x]$$

Montrons maintenant que (I.6) est vrai pour un segment ; par exemple :

$$D_n = \text{Prob}\begin{bmatrix} x_1 \leqq X_n < x_2 \\ y_1 \leqq Y_n < y_2 \end{bmatrix} - \text{Prob}\,[x_1 \leqq X_n < x_2] \times \text{Prob}\,[y_1 \leqq Y_n < y_2]$$

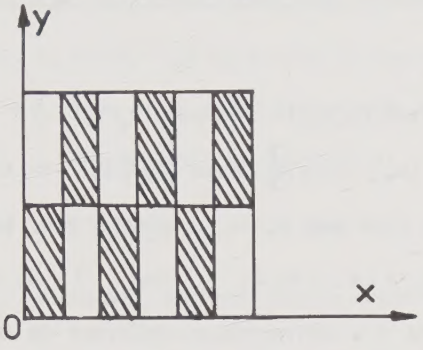
$$= F_n(x_2, y_2) - A_n(x_2)\, B_n(y_2) - F_n(x_2, y_1) + A_n(x_2)\, B_n(y_1)$$

$$- F_n(x_1, y_2) + A_n(x_1)\, B_n(y_2) + F_n(x_1, y_1) - A_n(x_1)\, B_n(y_1) \qquad (I.7)$$

Chaque terme tend uniformément vers 0, et $D_n \underset{u}{\longrightarrow} 0$. Ce qui vient d'être dit plus haut permet de considérer tous les types d'intervalles a_1 ou a_2. La propriété restera valable tant qu'on aura un nombre fini de différences $F_n - A_n B_n$.

Remarque - Autrement dit (I.6) reste valable si a_1 et a_2 sont constitués par toute union bornée d'intervalles de la droite, ou plus généralement par toute union bornée de pavés, les pavés pouvant dépendre de n. Mais nous allons voir que, contrairement au cas de l'indépendance, la propriété ne peut pas être généralisée : nous devons donc nous attendre à ce que les propriétés de l'indépendance ne puissent être aisément généralisées à l'indépendance asymptotique uniforme.

Nous allons donner un exemple inventé par GEFFROY [7] à propos d'une propriété ultérieure (voir I.3.1).



Nous partageons, comme l'indique la figure, le carré $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, en 4n rectangles égaux, délimités par les droites :

$$x = 0, \frac{1}{2n}, \frac{2}{2n}, \ldots, 1 \qquad y = 0, \frac{1}{2}, 1$$

Nous choisissons 2n rectangles, alternativement dans la bande $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$, et nous y répartissons uniformément la probabilité 1 (voir les rectangles hachurés de la figure). A cette distribution, nous faisons correspondre le couple de v.a. (X_n, Y_n) dont la f.r. est $F_n(x, y)$.

Les lois marginales de X_n et Y_n sont uniformes entre 0 et 1.

Si $k/n \leq x < \frac{k+1}{n}$, on a :

$$\frac{k}{n}\, y \leq F_n(x, y) < \frac{k+1}{n}\, y$$

donc :

$$|F_n(x, y) - x\, y| < \frac{y}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Il y a indépendance limite uniforme (d'ailleurs légale).

Désignons par a_1 la réunion des intervalles (dépendant de n) :

$$\frac{1}{2n} < x < \frac{2}{2n}$$

$$\frac{3}{2n} < x < \frac{4}{2n} \quad \text{etc.}$$

et par a_2 l'intervalle $0 < y < \frac{1}{2}$. Alors :

$$\text{Prob}\,[(X_n, Y_n) \in a_1 \times a_2] = 0$$

$$\text{Prob}\,[X_n \in a_1] = \frac{1}{2}$$

$$\text{Prob}\,[Y_n \in a_2] = \frac{1}{2}$$

La différence correspondant à (I.6) vaut $-\frac{1}{4}$ et reste donc fixe : on ne peut avoir le résultat du théorème I.2.

Un autre résultat très utile est le suivant :

THEOREME I.3 - Si X_n et Y_n sont asymptotiquement uniformément indépendantes, les v.a. $h_n(X_n)$ et $k_n(Y_n)$, où h_n et k_n sont des suites de fonctions monotones (au sens large), sont asymptotiquement uniformément indépendantes.

En effet, on a :

$$D_n = \text{Prob}[h_n(X_n) < x,\ k_n(Y_n) < y] - \text{Prob}[h_n(X_n) < x]\ \text{Prob}[k_n(Y_n) < y] \qquad (I.8)$$

$$D_n = \text{Prob}\left[(X_n, Y_n) \in (h_n^{-1}]-\infty, x[) \times (k_n^{-1}]-\infty, y[)\right] - \text{Prob}\left[X_n \in h_n^{-1}]-\infty, x[\right]\ \text{Prob}\left[Y_n \in k_n^{-1}]-\infty, y[\right] \qquad (I.9)$$

Or l'hypothèse de monotonie faite sur h_n et k_n montre que, par exemple :

$$h_n^{-1}]-\infty,\ x[=]-\infty, \alpha[\qquad \text{ou} \qquad]-\infty, \alpha]$$

Le théorème I.2 montre qu'il y a convergence uniforme de D_n .

Remarque - On voit d'ailleurs qu'il est possible de prendre des fonctions h_n et k_n un peu plus générales. Il suffit qu'elles soient monotones par morceaux avec un nombre de morceaux borné.

Mais pour les mêmes raisons que pour le théorème I.2, la propriété ne peut pas s'étendre à des fonctions h_n et k_n arbitraires ; il suffit par exemple de prendre X_n et Y_n distribuées comme dans l'exemple précédent et $h_n(x)$ et $k_n(y)$ définies entre 0 et 1 de la façon suivante :

$$h_n(x) = 1 \qquad \text{si} \qquad 0 < x < \frac{1}{2n}$$

$$h_n(x) = 0 \qquad \frac{1}{2n} < x < \frac{2}{2n}$$

$$h_n(x) = 1 \qquad \frac{2}{2n} < x < \frac{3}{2n}$$

etc. jusqu'à $x = 1$.

Puis,

$$k_n(y) = 0 \qquad \text{si} \qquad 0 < y < \frac{1}{2}$$

$$k_n(y) = 1 \qquad \text{si} \qquad \frac{1}{2} < y < 1$$

Choisissons dans (I.8) :

$$0 < x < 1 \quad , \qquad 0 < y < 1$$

on prend alors

$$D_n = \text{Prob}[(X_n, Y_n) \in a_1 \times a_2] - \text{Prob}[X_n \in a_1]\ \text{Prob}[Y_n \in a_2]$$

où a_1 et a_2 sont définis dans l'exemple qui illustre la remarque du théorème I.2. On y a vu que :

$$D_n = -\frac{1}{4}$$

Il n'y a donc pas convergence uniforme de $h_n(X_n)$ et $k_n(Y_n)$.

Dans la suite nous nous servirons principalement de transformation du type $h_n(X_n) = a_n X_n + b_n$.

L'indépendance asymptotique uniforme est une extension d'une forme d'indépendance asymptotique légale. On a en effet le résultat suivant :

THEOREME I.4 - Si X_n et Y_n ont chacune une loi-limite continue, leur indépendance limite légale est équivalente à leur indépendance limite uniforme.

Supposons que X_n et Y_n sont asymptotiquement uniformément indépendantes, alors, quelles que soient les constantes a_n, b_n, α_n, β_n, on a (Théorème I.3) :

$$F_n(a_n x + b_n,\ \alpha_n y + \beta_n) - A_n(a_n x + b_n)\ B_n(\alpha_n y + \beta_n) \xrightarrow[u]{} 0 \qquad (I.10)$$

Mais par hypothèse il existe $a_n > 0$, $\alpha_n > 0$, b_n et β_n telles que :

$$\begin{aligned} A_n(a_n x + b_n) &\xrightarrow[u]{} A(x) \\ B_n(\alpha_n x + \beta_n) &\xrightarrow[u]{} B(y) \end{aligned} \qquad (I.11)$$

Comme A(x) et B(y) sont continues, on peut écrire d'après un théorème de Polyã cité par DUGUE [6] :

$$A_n(a_n x + b_n)\ B_n(\alpha_n x + \beta_n) \xrightarrow[u]{} A(x)\ B(y) \qquad (I.12)$$

En rapprochant (I.10) et (I.12), il vient :

$$F_n(a_n x + b_n,\ \alpha_n y + \beta_n) \xrightarrow[u]{} A(x)\ B(y) \qquad (I.13)$$

Inversement si on a la convergence (I.13) de façon non nécessairement uniforme, on conclut à l'uniformité de part la continuité de A(x) B(y) ; de plus, en faisant dans (I.13) successivement $x = +\infty$ et $y = +\infty$, on voit que :

$$\begin{aligned} A_n(a_n x + b_n) &\xrightarrow[u]{} A(x) \\ B_n(\alpha_n y + \beta_n) &\xrightarrow[u]{} B(y) \end{aligned} \qquad (I.14)$$

donc :

$$F_n(a_n x + b_n,\ \alpha_n y + \beta_n) - A_n(a_n x + b_n)\ B_n(\alpha_n y + \beta_n) \xrightarrow[u]{} A(x)\ B(y) - A(x)\ B(y) = 0 \qquad (I.15)$$

La généralisation à un nombre quelconque de v.a. est évidente.

I.2.3 - Indépendance limite uniforme et coefficient de corrélation

On sait que lorsque deux variables aléatoires, dont chacune possède un moment du deuxième ordre, sont indépendantes, leur coefficient de corrélation est nul (la réciproque étant fausse). Nous allons voir une façon d'étendre cette propriété à l'indépendance limite uniforme.

THEOREME I.5 - Soient deux suites de v.a. X_n et Y_n dont les moments du deuxième ordre existent : si X_n et Y_n sont asymptotiquement uniformément indépendantes, et si la variable centrée réduite $\dfrac{X_n - E(X_n)}{(E\,(X_n - E(X_n))^2)^{\frac{1}{2}}}$ converge en loi, le coefficient de corrélation r_n entre X_n et Y_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Bien que les hypothèses en soient assez restrictives, nous aurons l'occasion d'appliquer ce résultat.

Démonstration :

Soient $\sigma(X_n)$ et $\sigma(Y_n)$ les écarts-types de X_n et Y_n. Posons :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{X_n - E(X_n)}{\sigma(X_n)} \\ v_n &= \frac{Y_n - E(Y_n)}{\sigma(Y_n)} \end{aligned} \qquad (I.16)$$

$$\Phi_n(u,v) = \text{Prob}\,[u_n < u,\ v_n < v]\ ,\quad \alpha_n(u) = \text{Prob}\,[u_n < u],\quad \beta_n(v) = \text{Prob}\,[v_n < v]$$

On a supposé que :

$$\alpha_n(u) \xrightarrow[\mathcal{L}]{} \alpha\,(u) \tag{I.17}$$

X_n et Y_n étant asymptotiquement uniformément indépendantes, on voit d'après le théorème 1.3 que :

$$\Phi_n(u,\ v) - \alpha_n(u)\ \beta_n(v) \xrightarrow[u]{} 0 \tag{I.18}$$

d'autre part,

$$r(X_n,\ Y_n) = E(u_n\ v_n) \tag{I.19}$$

Or,

$$E(u_n\ v_n) = \iint uv\ d\Phi_n(u,\ v) = \iint_{\substack{|u| < A \\ |v| < A}} uv\ d\Phi_n(u,\ v) + \iint_{\substack{|u| \geqq A \\ |v| \geqq A}} uv\ d\Phi_n(u,\ v) \tag{I.20}$$

où on se donne $A > 0$. Désignons par I_1 et I_2 les intégrales du membre de droite de (I.20). On a :

$$(I_2)^2 \leqq \int_{|u| \geqq A} u^2\ d\alpha_n(u) \int_{|v| \geqq A} v^2\ d\beta_n(v) \leqq \int_{|u| \geqq A} u^2\ d\alpha_n(u) \tag{I.21}$$

La première inégalité est celle de Schwarz, la deuxième est due au fait que $\int v^2\, d\beta_n(v) = 1$.

Afin de pouvoir affirmer que pour A assez grand, le terme de droite de (I.21) est arbitrairement petit, il faut pouvoir dire que l'intégrale $\int u^2\ d\alpha_n(u)$ est uniformément intégrable. Une condition suffisante pour cela est donnée dans LOEVE [15] ; c'est que :

$$\alpha_n(u) \xrightarrow[\mathcal{L}]{} \alpha(u)$$

$$\int u^2\ d\alpha_n(u) \longrightarrow \int u^2\ d\alpha(u)$$

La première condition est (I.17), la deuxième est satisfaite car les deux intégrales valent 1. Ainsi pour $A \geqq A_0(\varepsilon)$, on a $|I_2| < \varepsilon$.

Comme,

$$\int u\ d\alpha_n(u) = 0$$

on a, pour $A \geqq A_1(\varepsilon)$,

$$\left| \int_{|u| < A} u\ d\alpha_n(u) \right| = \left| \int_{|u| \geqq A} u\ d\alpha_n(u) \right| < \varepsilon \tag{I.22}$$

car, pour la même raison que précédemment $\int u\ d\alpha_n(u)$ est uniformément convergente. On prendra $A = \sup\,(A_0,\ A_1)$. Ainsi :

$$I_1 \leqq \left| \iint_{\substack{|u| < A \\ |v| < A}} u\ v\ d\ (\Phi_n(u,\ v) - \alpha_n(u)\ \beta_n(v)) \right| + \varepsilon \tag{I.23}$$

L'intégrale figurant dans (I.23) est égale à :

$$\int_{-A}^{+A} u\ d_u \int_{-A}^{+A} v\ d_v(\Phi_n - \alpha_n\beta_n) = \int_{-A}^{+A} \left[u \int_{-A}^{+A} v\ d_v(\Phi_n - \alpha_n\beta_n) \right] - \int_{-A}^{+A} du \int_{-A}^{+A} v\ d_v(\Phi_n - \alpha_n\beta_n) \tag{I.24}$$

et :

$$\int_{-A}^{+A} v\ d_v(\Phi_n - \alpha_n\beta_n) = A\,(\Phi_n(u,\ A) - \alpha_n(u)\ \beta_n(A)) + A(\Phi_n(u,\ -A) - \alpha_n(u)\ \beta_n(-A)) - \int_{-A}^{+A} (\Phi_n - \alpha_n\beta_n)\ dv \tag{I.25}$$

Or :

$$\left| \int_{-A}^{+A} (\Phi_n - \alpha_n \beta_n)\, dv \right| \leq 2A \sup_{-A \leq v \leq A} |\Phi_n - \alpha_n \beta_n| \qquad (I.26)$$

On voit que du fait de la convergence uniforme, pour $n > n(\varepsilon, A)$, on a :

$$\text{Sup} |\Phi_n - \alpha_n \beta_n| < \frac{\varepsilon}{A^2}$$

donc, d'après (I.25) :

$$\left| \int_{-A}^{+A} v\, d_v (\Phi_n - \alpha_n \beta_n) \right| < \frac{4\varepsilon}{A} \qquad (I.27)$$

et d'après (I.23) et (I.24) :

$$|I_1| < 17\ \varepsilon$$

donc :

$$|I_1 + I_2| < 18\,\varepsilon$$

On a finalement montré que $E(u_n v_n) \longrightarrow 0$, donc que $r_n \longrightarrow 0$.

Remarque - Trouver une condition nécessaire et suffisante pour assurer que $r_n \longrightarrow 0$ s'il y a indépendance limite uniforme semble être bien délicat. On peut voir que l'indépendance limite uniforme n'entraîne pas de façon nécessaire $r_n \longrightarrow 0$:

Considérons une v.a. X_n dont on définit ainsi la loi de probabilité :

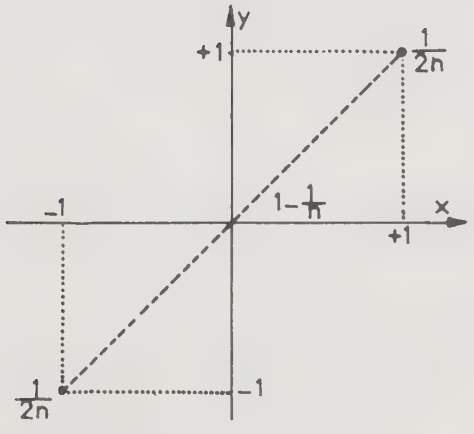
$$\text{Prob}\,[X_n = -1] = \text{Prob}\,[X_n = +1] = \frac{1}{2n}$$

$$\text{Prob}\,[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n}$$

Quant à Y_n, on a :

$$Y_n = X_n$$

Bien entendu $r(X_n, Y_n) = 1$.



On a pourtant indépendance limite uniforme ; en effet :

$$\text{Prob}\,[X_n = \alpha,\ Y_n = \beta] = 0 \qquad \text{si } \alpha \neq \beta$$

$$\text{Prob}\,[X_n = \alpha,\ Y_n = \alpha] = \text{Prob}\,[X_n = \alpha]$$

Si $\alpha \neq \beta$

$$\text{Prob}\,[X_n = \alpha]\,\text{Prob}\,[Y_n = \beta] = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2n}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{4n^2}, \quad \text{ou} \quad 0$$

suivant les valeurs de α et β. De toute façon ce produit converge vers 0.

Si $\alpha = \beta$,

$$\text{Prob}\,[X_n = \alpha]\;\text{Prob}\,[Y_n = \alpha] = 0, \frac{1}{4n^2}, \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$$

le dernier cas correspondant à $\alpha = 0$; dans ce cas, la différence (I.6) vaut :

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \longrightarrow 0$$

Il y a donc bien indépendance limite uniforme ; ceci tient à ce que toute la probabilité tend à se concentrer à l'origine ; X_n et Y_n sont indépendants à la limite, comme on peut dire que deux nombres certains sont indépendants. Nous voyons encore là un des aspects montrant l'insuffisance de la notion d'indépendance limite uniforme.

I.3 - INDEPENDANCE ASYMPTOTIQUE STRICTE EN PROBABILITE

I.3.1 - Une nouvelle critique de l'indépendance limite uniforme

On sait que si X_n et Y_n sont des v.a. indépendantes, on a :

$$\text{Prob}\,[Y_n < y\,;\, X_n = x] = \text{Prob}\,[Y_n < y]$$

Le but de ce paragraphe est de donner une nouvelle définition de l'indépendance limite telle que la loi de Y_n diffère de moins en moins (en un certain sens) de la loi marginale de Y_n. Nous allons voir en effet sur l'exemple au paragraphe I.2.2 que X_n et Y_n peuvent être asymptotiquement uniformément indépendantes (c'est le cas de l'exemple) sans que la propriété ci-dessus soit réalisée : la loi de Y_n liée par $X_n = x$ est uniforme entre 0 et 1/2 ou entre 1/2 et 1 suivant la valeur de x, chaque cas ayant la probabilité 1/2 de se produire.

I.3.2 - Définition de l'indépendance asymptotique stricte en probabilité

Avant de donner cette définition nous allons rappeler la définition de la loi liée.

Etant donné une v.a. Z et un vecteur aléatoire à k dimensions X^k, la loi liée de Z par rapport à $X^k = x^k$ est la fonction de répartition de Z, soit $C(z\,;\,x^k)$, qui est une fonction mesurable en x^k (elle est définie sauf sur un ensemble de x^k de probabilité nulle) telle que :

$$\int_{\chi_k < x_k} C(z\,;\,\chi^k)\;\text{Prob}\,[X^k \in \chi^k,\; \chi^k + d\chi^k] = F(Z,\; x^k) \qquad (I.28)$$

où $F(z,\, x^k)$ est la fonction répartition de $(Z,\, X^k)$. Les inégalités $X^k < x^k$ et la notation $X^k \in (\chi^k,\; \chi^k + d\chi^k)$ portent bien entendu sur les composantes de X^k, χ^k et x^k (voir [15](1)) ; on peut aussi considérer au lieu de $X^k < x^k$ et $F(Z,\, x^k)$ des boréliens de R^k et la loi de probabilité correspondante en Z et X^k.

En pratique, on obtiendra souvent $C(z\,;\,x^k)$ en cherchant la limite de

$$\frac{\text{Prob}\,[Z_n < z,\; X^k \in (x^k,\; x^k + dx^k)]}{\text{Prob}\,[X^k \in (x^k,\; x^k + dx^k)]} \qquad (I.29)$$

Cette limite n'existe pas toujours ; si on considère le cas de deux variables aléatoires à une dimension X et Y, la fonction de répartition de Y liée par X = x sera :

---

(1) P. 364 c.

$$B(y\ ;\ x) = \lim_{dx \to 0} \frac{\text{Prob}\ (x < X < x + dx,\ Y < y)}{\text{Prob}\ (x < X < x + dx)} \qquad \text{(I.29 bis)}$$

Il est à noter que cette dernière limite existe toujours, sauf sur un ensemble de x de mesure nulle ; on aura bien entendu :

$$\int_{X<x} B(y\ ;\ X)\ dA(X) = F(x,\ y) \qquad \text{(I.28 bis)}$$

L'ensemble de ces résultats peuvent être considérés comme des applications des théorèmes sur les fonctions absolument continues (F(x, y) "est absolument continue en A(x)" sauf en un nombre dénombrable de points correspondant aux discontinuités de A(x)) (voir TITCHMARSH [25]).

Désignons par $B_n(y\ ;\ x)$ la loi de Y_n liée par $X_n = x_n$.

DEFINITION - On dit que Y_n est asymptotiquement strictement indépendante de X_n en probabilité, si, pour tout $\varepsilon > 0$ donné,

$$\delta(x_n) = \sup_{y \in R} |B_n(y\ ;\ x_n) - B_n(y)| < \varepsilon \qquad \text{(I.30)}$$

pour un ensemble de valeurs de $X_n = x_n$ dont la probabilité tend vers 1.

Cette définition est un cas particulier de la définition donnée par GEFFROY [7] car nous avons choisi une distance particulière. Nous la généraliserons d'une autre façon en disant que Z_n est asymptotiquement indépendant en probabilité du vecteur aléatoire à k dimensions X_n^k si, pour un ensemble Δ_n de valeurs de x_n^k dont la probabilité tend vers 1, on a, pour $\varepsilon > 0$, donné :

$$\delta(x_n^k) = \sup_{z \in R} |C_n(z\ ;\ x_n^k) - C_n(z)| < \varepsilon \qquad \text{(I.31)}$$

Notons que cette indépendance limite n'est pas réciproque : sur l'exemple I.2.2, on voit que X_n est asymptotiquement indépendant en probabilité de Y_n, alors que Y_n ne l'est pas de X_n.

Notons aussi que le fait que $B_n(y\ ;\ x)$ (ou $C_n(z\ ;\ x_n^k)$) ne soit pas définie sur un ensemble de probabilité nulle est sans inconvénient sur la définition de l'indépendance limite en probabilité.

I.3.3 - Indépendance limite uniforme et indépendance asymptotique stricte en probabilité

Nous avons vu que l'indépendance limite uniforme n'entraînait pas l'indépendance en probabilité ; GEFFROY [7] donne même un exemple où X_n et Y_n ne sont pas indépendants asymptotiquement en probabilité l'un par rapport à l'autre, mais où il y a indépendance limite uniforme. En revanche nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THEOREME I.6 - L'indépendance limite stricte en probabilité de Y_n par rapport à X_n entraîne l'indépendance uniforme de X_n et Y_n.

Posons :

$$R_x =]-\infty,\ x[$$

$$E_n = [\delta(x_n) < \varepsilon]$$

$$\varepsilon_n = E_n \cap R_x$$

$$E_n' = R - E_n$$

$$\varepsilon_n' = E_n' \cap R_x$$

Sur ε_n, on a :

$$B_n(y) - \varepsilon < B_n(y\ ;\ x) < B_n(y) + \varepsilon \qquad \text{(I.32)}$$

par définition de E_n. Donc :

$$\int_{\varepsilon_n} [B_n(y) - \varepsilon]\ dA_n(x) < \int_{\varepsilon_n} B_n(y\ ;\ x)\ dA_n(x) < \int_{\varepsilon_n} [B_n(y) + \varepsilon]\ dA_n(x) \qquad \text{(I.33)}$$

Si nous rajoutons au terme central :

$$\int_{\epsilon'_n} B_n(y\ ;\ x)\ dA_n(x) > 0$$

nous obtiendrons :

$$\int_{-\infty}^{x} B_n(y\ ;\ x)\ dA_n(x) = F_n(x,\ y)$$

On ne change pas les inégalités en ajoutant au premier terme :

$$\int_{\epsilon'_n} [B_n(y) - \varepsilon]\ dA_n(x) - (1 - \varepsilon)\ \varepsilon \tag{I.34}$$

car :

$$\left| \int_{\epsilon'_n} [B_n(y) - \varepsilon]\ dA_n(x) \right| \leqq (1 - \varepsilon) \int_{\epsilon'_n} dA_n(x) < (1 - \varepsilon)\,\varepsilon \tag{I.35}$$

De même, on ne change pas le sens de la deuxième inégalité si on rajoute au troisième terme :

$$\int_{\epsilon'_n} [B_n(y) + \varepsilon]\ dA_n(x) + \varepsilon \tag{I.36}$$

car le premier terme de (I.36) est positif ou nul, le second :

$$\varepsilon > \int_{\epsilon'_n} B_n(y\ ;\ x)\ dA_n(x)$$

Finalement, on obtient les inégalités :

$$-(1 - \varepsilon)\,\varepsilon + \int_{-\infty}^{x} [B_n(y) - \varepsilon]\ dA_n(x) < F_n(x,\ y) < \int_{-\infty}^{x} [B_n(y) + \varepsilon]\ dA_n(x) + \varepsilon \tag{I.37}$$

Or :

$$\int_{-\infty}^{x} -\varepsilon\ dA_n(x) > -\varepsilon \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{x} \varepsilon\ dA_n(x) < \varepsilon$$

donc, a fortiori :

$$-2\varepsilon + A_n(x)\ B_n(y) < F_n(x,\ y) < A_n(x)\ B_n(y) + 2\varepsilon \tag{I.38}$$

Autrement dit :

$$F_n(x,\ y) - A_n(x)\ B_n(y) \xrightarrow[u]{} 0 \tag{I.39}$$

La généralisation de ce théorème au cas où x a plusieurs dimensions ($x = x^k$) est immédiate ; par exemple on en déduira :

$$F_n(x,\ y,\ z) - C_n(z)\ \text{Prob}\,[X_n < x,\ Y_n < y] \xrightarrow[u]{} 0 \tag{I.40}$$

Remarque - Pour établir que :

$$F_n(x,\ y,\ z) - A_n(x)\ B_n(y)\ C_n(z) \xrightarrow[u]{} 0 \tag{I.41}$$

il est évident qu'il est nécessaire et suffisant que :

$$\text{Prob}\,[X_n < x,\ Y_n < y_n] - A\,(x)\ B\,(y) \xrightarrow[u]{} 0 \tag{I.42}$$

c'est-à-dire que X_n et Y_n soient asymptotiquement uniformément indépendantes.

Il serait intéressant de voir quelles conditions il faut ajouter à l'indépendance limite uniforme pour obtenir l'indépendance limite en probabilité. Cette question semble délicate. Nous donnerons un résultat sous la forme d'une condition suffisante.

THEOREME I.7 - Si $B_n(y\,;\,x) - B_n(y)$ ne change de signe qu'un nombre uniformément borné de fois en x, alors l'indépendance limite uniforme est équivalente à l'indépendance limite stricte en probabilité de Y_n par rapport à X_n.

Remarquons que dans l'exemple I.2.2, $B_n(y\,;\,x) - B_n(y)$ change 2n fois de signe, et 2n n'est pas uniformément borné.

DEMONSTRATION - Nous supposerons que $B_n(y\,;\,x) - B_n(y)$ ne change qu'au plus une fois de signe, la généralisation se fera aisément. Il nous suffit de montrer que l'indépendance limite uniforme entraîne l'indépendance limite en probabilité. Nous raisonnerons par l'absurde.

On a :

$$F_n(x,\ y) - A_n(x)\ B_n(y) = \int_{-\infty}^{x} [B_n(y\ ;\ u) - B_n(y)]\ dA_n(u) \tag{I.43}$$

Supposons qu'on n'ait pas indépendance limite en probabilité de Y_n par rapport à X_n ; cela signifie qu'on peut extraire de n une suite n_i telle qu'il lui corresponde une suite d'ensembles $\Delta_{n_i} \subset R$, avec :

$$P_{n_i}(\Delta_{n_i}) = \int_{\Delta_{n_i}} dA_{n_i}(x) > \eta > 0 \tag{I.44}$$

et pour tout $x \in \Delta_{n_i}$

$$\delta(x) = \sup_y |\, B_{n_i}(y,\ x) - B_{n_i}(y)| > \varepsilon > 0 \tag{I.45}$$

Si $B_{n_i}(y\ ;\ u) - B_{n_i}(y)$ ne change pas de signe et reste par exemple positif, on aura donc dans (I.43), en faisant $x = +\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [B_{n_i}(y\ ;\ u) - B_{n_i}(y)]\ dA_n(u) = 0 \tag{I.46}$$

donc :

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sup\, [B_n(y\ ;\ u) - B_n(y)]\ dA_n(u) \geqq \int_{\Delta_{n_i}} \sup_y\, [B_{n_i}(y\ ;\ u) - B_{n_i}(y)]\ dA_{n_i}(u) \tag{I.47}$$

et donc :

$$0 \geqq \int_{\Delta_{n_i}} \varepsilon\ dA_{n_i}(u) \geqq \varepsilon\eta \tag{I.48}$$

Il y a contradiction. Si, par contre, il y a un changement de signe pour $x = x_{n_i}(y)$, posons :

$$P(\Delta_{n_i}) = \int_{\Omega_{n_i}(y)} dA_{n_i}(x) + \int_{\Omega'_{n_i}(y)} dA_{n_i}(x) > \eta \tag{I.49}$$

avec :

$$\begin{aligned} \Omega_{n_i}(y) &= \Delta_{n_i} \cap\ ]-\infty,\ x_{n_i}(y)[\\ \Omega'_{n_i}(y) &= \Delta_{n_i} \cap\ [x_{n_i}(y),\ +\infty[\end{aligned} \tag{I.50}$$

La plus grande des mesures de (I.49), dont la somme est $P(\Delta_{n_i})$ est supérieure à $\eta/2$; soit $\Omega_{n_i}(y)$ par exemple :

$$\int_{\Omega_{n_i}(y)} dA_{n_i}(x) > \frac{\eta}{2}$$

Supposons aussi, pour fixer les idées, que dans $]-\infty,\ x_{n_i}(y)[$ on ait :

$$B_{n_i}(y,\ x) - B_{n_i}(y) \geqq 0$$

S'il y avait plus d'un changement de signe, il suffirait de faire une partition finie analogue à (I.49) et les conclusions seraient analogues.

On a alors :

$$\int_{-\infty}^{x_{n_i}(y)} [B_{n_i}(y\,;\,u) - B_{n_i}(y)]\, dA_{n_i}(u) = F_{n_i}(x_{n_i}(y),\ y) - A_{n_i}(x_{n_i}(y))\, B_{n_i}(y) \geq \int_{\Omega_{n_i}} [B_{n_i}(y\,;\,u) - B_{n_i}(y)]\, dA_{n_i}(u) \qquad (I.51)$$

donc :

$$\sup_y [F_{n_i}(x_{n_i}(y),\ y) - A_{n_i}(x_{n_i}(y))\, B_{n_i}(y)] \geq \int_{\Omega_{n_i(y)}} \sup_y [B_{n_i}(y\,;\,u) - B_{n_i}(y)]\, dA_{n_i}(u) > \int_{\Omega_{n_i(y)}} \varepsilon\, dA_{n_i}(u) > \frac{\varepsilon\eta}{2} \qquad (I.52)$$

Or l'indépendance limite uniforme entraîne la convergence vers zéro du premier terme des inégalités (I.52), ce qui est contradictoire (CQFD).

I.3.4 - Propriétés de l'indépendance limite stricte en probabilité

THEOREME I.8 - Si Y_n est asymptotiquement strictement indépendant en probabilité de X_n, il en est de même de toute v.a. $h_n(Y_n)$ où h_n est monotone par morceaux, avec un nombre uniformément borné de morceaux.

La démonstration est analogue à celle du théorème I.3.

Nous donnons un résultat nouveau.

THEOREME I.9 - Si Z_n est asymptotiquement strictement indépendant en probabilité du vecteur aléatoire à k dimensions X_n^k, il l'est aussi de tout vecteur aléatoire à p dimensions $h_n^p(X_n^k)$ où h_n^p est une fonction de R^k à valeurs dans R^p telle que $(P)^{-1}(h_n^p(\Delta_n)) \subset \Delta_n$, où Δ_n est la région relative à l'inégalité (I.31).

Deux cas particuliers sont intéressants : k = 1 et k = 2 avec p = 1. Notons que la propriété demandée à h_n est satisfaite si h_n a ses composantes strictement monotones par rapport aux composantes de X_n^k.

Par définition, on a :

$$\int_{u^p < h^p} C_n(z\ ;\ h^p(X^k) = u^p)\ \text{Prob}\,[h_n^p(X_n^k) \in u^p,\ u^p + du^p] = \text{Prob}\,[Z_n < z,\ h_n^p(X_n^k) < h^p] \qquad (I.53)$$

et :

$$\int_{v^k < x^k} C_n(z\ ;\ X_n^k = V^k)\ \text{Prob}\,[X_n^k \in V^k,\ V^k + dV^k] = \text{Prob}\,[Z_n < z,\ X_n^k < x^k] \qquad (I.54)$$

Ainsi (I.53) est aussi égal à :

$$\int_{h_n^p(X_n^k) < h^p} dx_k \int_{v^k < x^k} C_n(z\ ;\ V^k = X_n^k)\ \text{Prob}\,[X_n^k \in V^k,\ V^k + dV^k] \qquad (I.55)$$

donc :

$$\int_{u^p < h^p} \sup_{z \in R} |\, C_n(z;\ h_n^p(X_n^k) = u^p) - C_n(z)\,|\ \text{Prob}\,[h_n^p(X_n^k) \in u^p,\ u^p + du^p] = \int_{h_n^p(X_n^k) < h^p} d_x k \int_{v^k < x^k} \sup_{z \in R} |\, C_n(z;\ V^k = X_n^k) - C_n(z)\,|\ \text{Prob}\,[X_n^k \in V^k,\ V^k + dV^k] \qquad (I.56)$$

Ceci est vrai pour tout h^p ; si on intègre sur $h_n^p(\Delta_n)$, l'hypothèse faite sur h montre que $(h_n^p)^{-1}\ (h_n^p(\Delta_n)) \subset \Delta_n$, donc $X_n^k \in \Delta_n$; dans le deuxième nombre de (I.56), on peut donc porter l'inégalité :

$$\sup_{z \in R} |C_n(z\ ;\ V^k = X_n^k) - C_n(z)| < \varepsilon \qquad (I.57)$$

donc :

$$\int_{u^p \in h_n^p(\Delta_n)} \sup_{z \in R} |C_n(z\ ;\ h_n^p(X_n^k) = u^p) - C_n(z)|\ \text{Prob}\,[h_n^p(X_n^k) \in u^p,\ u^p + du^p] < \varepsilon \qquad (I.58)$$

la probabilité de $h_n^p(\Delta_n)$ étant $1 - \varepsilon$. Donnons-nous maintenant $\varepsilon' > 0$, en choisissant ε tel que $\varepsilon = \varepsilon'^2$. Posons :

$$D = \sup_{z \in R} |C_n(z\ ;\ h_n^p) - C_n(z)| \qquad (I.59)$$

On a :

$$\int_H D \, dP < \varepsilon = \varepsilon'^2 , \int_H dP = 1 - \varepsilon \tag{I.60}$$

où P est la loi de probabilité relative à $h_n^p(X_n^k)$, $H = h^p(\Delta_n)$. On voit alors que sauf sur un ensemble de mesure au plus égale à ε', on a $D < \varepsilon'$; s'il n'en était pas ainsi on aurait en effet :

$$\int_H D \, dP > \varepsilon' \times \varepsilon' = \varepsilon'^2 \tag{I.61}$$

ce qui est contradictoire, Ainsi (pour n assez grand) $D < \varepsilon'$ cela sur un ensemble de mesure $1 - \varepsilon - \varepsilon' = 1 - \varepsilon' - \varepsilon'^2$: nous avons ainsi montré l'indépendance limite en probabilité de Z_n et $h_n^p(X_n^k)$.

I.4 - INDEPENDANCE ASYMPTOTIQUE STRICTE PRESQUE COMPLETE

Cette définition a été donnée par GEFFROY [7].

On dit que Y_n est asymptotiquement strictement indépendant de X_n presque complètement si la distance $\delta(x_n)$ définie en I.29 tend vers 0 presque complètement.

Autrement dit, si Δ_n est l'ensemble des valeurs telles que $\delta(x_n) < \varepsilon$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Prob}\,[X_n \notin \Delta_n] < \infty \tag{I.60}$$

Cette indépendance limite, très forte, entraîne les autres indépendances limites définies ici.

CHAPITRE II

LIAISONS ET INDÉPENDANCES LIMITES ENTRE STATISTIQUES D'ORDRE

II.1 - RAPPEL DE RESULTATS RELATIFS AUX STATISTIQUES D'ORDRE

II.1.1 - Définitions et résultats élémentaires

Etant donné un ensemble de n v.a.

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \tag{II.1}$$

on dit que cet ensemble est un échantillon de la distribution attachée à la f.r. F(x) si ces v.a. sont indépendantes et si leurs f.r. marginales sont égales à F(x).

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une réalisation de cet échantillon. Si on ordonne ces nombres, par valeurs non décroissantes, on obtient la suite :

$$x_1^* \leqq x_2^* \leqq \ldots \leqq x_n^*$$

Cette suite est la réalisation d'un ensemble de n v.a. :

$$X_1^* \leqq X_2^* \ldots \leqq X_n^* \tag{II.2}$$

qu'on nomme échantillon ordonné de taille n attaché à la f.r. F(x). X_r^* est une fonction symétrique de $X_1, \ldots, X_n$ qu'on nomme r^e valeur de l'échantillon ; on dit aussi que X_r^*, ou plus généralement toute fonction de X_r^*, X_r^*, etc. constitue une statistique d'ordre.

On s'intéresse souvent en particulier à X_1^* et X_n^* qui constituent les valeurs extrêmes (notées $Z_n = X_1^*$ et $Y_n = X_n^*$ pour respectivement la plus petite et la plus grande valeur). On généralise la notion de valeurs extrêmes en considérant les statistiques d'ordre X_α^* et $X_{n-\beta}^*$ où α et β sont fixes.

On s'intéresse aussi à X_r^* où r est défini par l'inégalité :

$$\frac{r}{n} \leqq k < \frac{r+1}{n}$$

où l'on se donne k, strictement compris entre 0 et 1. On dit que X_r^* est le quantile empirique d'ordre k.

Dans la suite, il nous arrivera souvent d'écrire F_r au lieu de $F(x_r)$.

La loi élémentaire de l'échantillon étant :

$$dF_1 \; dF_2 \ldots dF_n \tag{II.3}$$

celle de l'échantillon ordonné sera obtenue en multipliant (II.3) par le nombre de permutations n!

$$n! \; dF_1 \; dF_2 \ldots dF_n \tag{II.4}$$

La loi marginale élémentaire de X_r^* s'obtient, soit par intégration de (II.4), soit par l'usage de la formule multinomiale :

$$\frac{n!}{(n-r)!\,(r-1)!} F_r^{r-1} (1 - F_r)^{n-r} \, dF_r \tag{II.5}$$

II.1.2 - Indépendances conditionnelles entre statistiques d'ordre

THEOREME II.1 - Dans un échantillon ordonné, conditionnellement à $X^*_{r_1} = x^*_{r_1}$, $X^*_{r_2} = x^*_{r_2}, \ldots, X^*_{r_k} = x^*_{r_k}$, les groupes de v.a.

$$X^*_1, \ldots X^*_{r_1-1}$$

$$X^*_{r_1+1}, \ldots, X^*_{r_2-1}$$

etc.

$$X^*_{r_k+1}, \ldots, X^*_n$$

sont indépendantes. De plus chaque groupe $X_{r_i+1}, \ldots, X^*_{r_{i+1}-1}$ peut être considéré comme un échantillon ordonné de $r_{i+1} - r_{i-1}$ v.a. indépendantes issues de la distribution ayant pour f.r. $F(x)$ tronquée supérieurement en $x^*_{r_{i+1}}$ et inférieurement en $x^*_{r_i}$; seule la troncature respectivement inférieure ou supérieure au système subsistant pour le dernier et le premier groupe (On suppose que tous les F_{r_i} sont différents de 0 et 1).

C'est une propriété "markovienne" des échantillons ordonnés.

Afin d'alléger l'écriture, nous ferons la démonstration avec k = 2. La loi marginale de $X^*_{r_1}$ et $X^*_{r_2}$ est :

$$\frac{n!}{(r_1-1)!\,(r_2-r_1-1)!\,(n-r_2)!}\,(F_{r_1})^{r_1-1}\,(F_{r_2}-F_{r_1})^{r_2-r_1-1}\,(1-F_{r_2})^{n-r_2}\,dF_{r_1}\,dF_{r_2} \qquad (II.6)$$

En divisant (II.4) par (II.6), on obtiendra donc la loi élémentaire de $X^*_1, \ldots X^*_{r_1-1}$, $X^*_{r_1+1} \ldots X^*_{r_2-1}$, $X^*_{r_2+1} \ldots X^*_n$, conditionnelle à $X^*_{r_1}$ et $X^*_{r_2}$, soit :

$$\frac{(r_1-1)!\,(r_2-r_1-1)!\,(n-r_2)!}{(F_{r_1})^{r_1-1}\,(F_{r_2}-F_{r_1})^{r_2-r_1-1}\,(1-F_{r_2})^{n-r_2}}\,dF_1 \ldots dF_{r_1-1}\,dF_{r_1+1} \ldots dF_{r_2-1}\,dF_{r_2+1} \ldots dF_n \qquad (II.7)$$

D'autre part les lois marginales respectives de $X^*_1, \ldots, X^*_{r_1}$ puis $X^*_{r_1} \ldots X^*_{r_2}$, puis $X^*_{r_2}, \ldots, X^*_n$ sont respectivement dans l'ordre :

$$\frac{n!}{(n-r_1)!}\,(1-F_{r_1})^{n-r_1}\,dF_1 \ldots dF_{r_1}$$

$$\frac{n!}{(r_1-1)!\,(n-r_2)!}\,(F_{r_1})^{r_1-1}\,(1-F_{r_2})^{n-r_2}\,dF_{r_1} \ldots dF_{r_2} \qquad (II.8)$$

$$\frac{n!}{(r_2-1)!}\,(F_{r_2})^{r_2-1}\,dF_{r_2} \ldots dF_n$$

en divisant respectivement chacune de ces quantités par les lois marginales (II.5) ou (II.6), on aboutit aux lois conditionnelles par rapport à $X^*_{r_1}$ et $X^*_{r_2}$ de $X^*_1, \ldots, X^*_{r_1-1}$, puis $X^*_{r_1+1}, \ldots, X^*_{r_2-1}$ et $X^*_{r_2+1}, \ldots, X^*_n$,

$$\frac{(r_1-1)!}{(F_{r_1})^{r_1-1}}\,dF_1 \ldots dF_{r_1-1}$$

$$\frac{(r_2-r_1-1)!}{(F_{r_2}-F_{r_1})^{r_2-r_1-1}}\,dF_{r_1+1} \ldots dF_{r_2-1} \qquad (II.9)$$

$$\frac{(n-r_2)!}{(1-F_{r_2})^{n-r_2}}\,dF_{r_2+1} \ldots dF_n$$

(II.9) et (II.7) aboutissent bien au résultat énoncé.

Un autre résultat nous sera utile, que nous énoncerons ainsi :

THEOREME II.2 - Conditionnellement à $X_1^* \geq x_1^*$ et $X_n^* < x_n^*$, $X_1^*, \ldots, X_n^*$ peut être considéré comme l'échantillon ordonné de taille n d'une loi tronquée inférieurement et supérieurement en x_1^* et x_n^*.

En effet, comme :

$$\text{Prob}\,[X_1^* \geq x_1^*,\ X_n^* < x_n^*] = (F_n - F_1)^n \tag{II.10}$$

on voit que la loi conditionnelle de $X_1^*, \ldots, X_n^*$ est :

$$\frac{n!\ dF_1 \ \ldots\ dF_n}{(F_n - F_1)^n} \tag{II.11}$$

II.2 - ETUDE ASYMPTOTIQUE DE LA LIAISON ENTRE X_r^* ET $X_{r'}^*$

II.2.1 - Généralités

Cette étude a été plusieurs fois abordée de différentes manières depuis un certain temps. Pratiquement les études faites jusqu'à récemment sont de deux types :

On s'intéresse à la liaison limite entre les quantiles X_r^* et $X_{r'}^*$ d'ordre respectif k et k' ; sous certaines conditions de régularité dont nous serons amenés à parler, X_r^* et $X_{r'}^*$ ont pour loi limite, la loi normale à deux dimensions, avec un coefficient de corrélation positif. Nous renvoyons à SMIRNOV [23]. MOSTELLER [17] a montré que ce résultat se généralisait pour un nombre fini de quantiles $X_{r_1}^*, \ldots, X_{r_k}^*$.

De façon opposée on a étudié et montré l'indépendance entre les valeurs extrêmes X_1^* et X_n^* et plus généralement X_α^* et $X_{n-\beta}^*$. Tous ces résultats, étudiés notamment par GUMBEL [10] aboutissent à l'indépendance limite des valeurs extrêmes (plus petite avec plus grande). Le résultat le plus récent a été donné par GEFFROY [7] qui a montré que X_α^* et $X_{n-\beta}^*$ étaient presque complètement asymptotiquement indépendantes l'une par rapport à l'autre. On trouvera aussi un résumé sur ces questions dans WILKS [26].

Plus récemment BERMAN [3] a étudié l'indépendance limite légale entre un quantile et la plus grande valeur ; nous avons effectué l'étude de l'indépendance limite uniforme [22].

L'étude générale sur la liaison entre X_r^* et $X_{r'}^*$ que nous allons aborder ici, avec les conditions d'indépendance limite, a été entreprise par ROSSBERG [18] et KREM [19], de façon indépendante et simultanée, les méthodes étant très voisines. Ces résultats, qui donnent une condition suffisante d'indépendance asymptotique uniforme, ont été retrouvées par nous de façon entièrement différente sur l'indépendance limite en probabilité (qui, comme on le verra, est équivalente dans ce cas à l'indépendance limite uniforme) ; nous avons montré de plus que la condition donnée est aussi nécessaire pour toute répartition continue. Nous avons ensuite étudié une condition pour l'indépendance limite presque complète (nécessaire et suffisante).

II.2.2 - Indépendance limite uniforme et indépendance limite en probabilité entre X_r^* et $X_{r'}^*$

THEOREME II.3 - X_r^* et $X_{r'}^*$ sont asymptotiquement uniformément indépendantes dans les mêmes conditions où elles sont indépendantes asymptotiquement en probabilité l'une par rapport à l'autre.

Supposons en effet $r' > r$; l'application du théorème II.1 et de la formule (II.5) conduit aux deux résultats suivants :

$$F_n(x'_r\ ;\ x_r) = \frac{(n-r)!}{(r'-r-1)!\,(n-r')!} \int_0^{\frac{F_{r'}-F_r}{1-F_r}} u^{r'-r-1}(1-u)^{n-r'}\,du \tag{II.12}$$

et :

$$F_n(x_r\ ;\ x_{r'}) = \frac{(r'-1)!}{(r-1)!\ (r'-r-1)!} \int_0^{\frac{F_r}{F_{r'}}} u^{r-1}(1-u)^{r'-r-1}\,du \tag{II.13}$$

On voit que $F_n(x_{r'}\ ;\ x_r)$ est une fonction monotone de x_r et que $F_n(x_r\ ;\ x_{r'})$ est aussi une fonction monotone de $x_{r'}$. Le théorème I.7 peut donc être appliqué et conduit au résultat annoncé.

Remarquons que si X_r^* est indépendant en probabilité asymptotiquement de $X_{r'}^*$, l'inverse est

aussi vrai d'après ce théorème, puisque les deux propositions sont équivalentes à l'indépendance limite uniforme.

Nous allons présenter un autre résultat qui simplifiera les démonstrations ultérieures.

THEOREME II.4 - Si la statistique d'ordre $X^*_{r''}$ est asymptotiquement indépendante en probabilité de $X^*_{r'}$ où $r' < r''$, elle l'est de toute statistique X^*_r où $r < r'$.

Nous devons montrer l'existence d'un domaine de X^*_r, de probabilité $1 - \varepsilon$, ε étant donné positif aussi petit qu'on veut, où :

$$\sup_{x_{r''} > x_r} |F_n(x_{r''} ; x_r) - F_n(x_{r''})| \longrightarrow 0 \qquad (II.14)$$

Or :

$$F_n(x_{r''} ; x_r) = \int_R F_n(x_{r''} ; x_r, x_{r'}) \, dF_n(x_{r'} ; x_r) \qquad (II.15)$$

donc, en tenant compte du fait que d'après le théorème II.1 :

$$F_n(x_{r''} ; x_r, x_{r'}) = F_n(x_{r''} ; x_{r'}) \qquad (II.16)$$

il vient :

$$F_n(x_{r''} ; x_r) - F_n(x_{r''}) = \int_R (F_n(x_{r''} ; x_{r'}) - F_n(x_{r''})) \, dF_n(x_{r'} ; x_r) \qquad (II.17)$$

$X_{r''}$ étant à la limite indépendante en probabilité de $X^*_{r'}$, il existe un domaine Δ_n de $X_{r'}$ où on a, $\varepsilon' > 0$ étant donné :

$$\sup_{x_{r''}} |F_n(x_{r''} ; x_{r'}) - F_n(x_{r''})| < \varepsilon' \; ; \int_{x_{r'} \in R - \Delta_n} dF_n(x_{r'}) = \varepsilon_n \longrightarrow 0 \qquad (II.18)$$

En appliquant (II.17), on obtient par l'usage d'inégalités triviales :

$$|F_n(x_{r''} ; x_r) - F_n(x_{r''})| \leqq \varepsilon' + \int_{R - \Delta_n} dF_n(x_{r'} ; x_r) \qquad (II.19)$$

Comme :

$$F_n(x_{r'}) = \int_{x_r \in R} F_n(x_{r'} ; x_r) \, dF_n(x_r) \qquad (II.20)$$

on voit que :

$$\varepsilon_n = \iint_{\substack{x_{r'} \in R - \Delta_n \\ x_r \in R}} dF_n(x_r) \, dF_n(x_{r'} ; x_r) \longrightarrow 0 \qquad (II.21)$$

Raisonnons maintenant par l'absurde : s'il n'existe de domaine de probabilité $1 - \varepsilon$ où l'on ait (II.14), on voit en utilisant (II.19) qu'il doit exister un domaine Ω_n, où pour $x_r \in \Omega_n$, on ait avec $\eta > 0$:

$$\int_{x_{r'} \in R - \Delta_n} dF_n(x_{r'} ; x_r) > \varepsilon \; , \; \int_{x_r \in \Omega_n} dF_n(x_r) > \eta \qquad (II.22)$$

On peut donc minorer ε_n par $\varepsilon\eta > 0$, ce qui est bien contradictoire, d'où le résultat (1).

Avant d'énoncer et de démontrer notre proposition concernant l'indépendance limite entre X^*_r et $X^*_{r'}$, nous montrerons le résultat suivant :

LEMME - Si r tend vers l'infini et si r/n a pour limite k, avec $0 \leqq k < 1$, alors l'expression :

$$\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!} \int_0^a u^{r-1} (1-u)^{n-r} \, du - \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-k)}} \int_{-\infty}^{\frac{(n-1)a-(r-1)}{\sqrt{F}}} e^{-t^2/2(1-k)} \, dt \qquad (II.23)$$

---

(1) Il est évident que ce résultat pourrait prendre une forme indépendante de la notion de statistique en indiquant que X_r et $X_{r''}$ sont indépendants conditionnellement à Y

converge uniformément pour $0 \leqq a \leqq 1$ vers zéro.

Effectuons dans le terme de gauche de (II.23) le changement de variable :

$$v = \frac{(n-1)\,u - r - 1}{\sqrt{r}} \tag{II.24}$$

il vient :

$$\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!} \int_{-\frac{r-1}{\sqrt{r}}}^{\frac{(n-1)a-(r-1)}{\sqrt{r}}} \frac{(v\sqrt{r}+r-1)^{r-1}\,(n-r-v\sqrt{r})^{n-r}}{(n-1)^{n-1}} \frac{\sqrt{r}}{n-1}\,dv \tag{II.25}$$

En appliquant la formule de Stirling, et en tenant compte de $r/n \longrightarrow k$, (II.25) est équivalent à :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\,(1-k)}} \int_{-\frac{r-1}{\sqrt{r}}}^{\frac{(n-1)a-(r-1)}{\sqrt{r}}} \left[1 + \frac{v\sqrt{r}}{r-1}\right]^{r-1} \left[1 - \frac{v\sqrt{r}}{n-r}\right]^{n-r} dv \tag{II.26}$$

Comme,

$$\int_{-\infty}^{-\frac{r-1}{\sqrt{r}}} e^{-t^2/2(1-k)}\,dt \longrightarrow 0 \tag{II.27}$$

On voit qu'il revient au même, pour montrer (II.23), de montrer que :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\,(1-k)}} \int_{-\frac{r-1}{\sqrt{r}}}^{\frac{(n-1)a(r-1)}{\sqrt{r}}} \left[1 + \frac{v\sqrt{r}}{r-1}\right]^{r-1} \left[1 - \frac{v\sqrt{r}}{n-r}\right]^{n-r} dv - \frac{1}{\sqrt{2\pi\,(1-k)}} \int_{-\frac{r-1}{\sqrt{r}}}^{\frac{(n-1)a-(r-1)}{\sqrt{r}}} e^{-t^2/2(1-k)}\,dt \longrightarrow 0 \tag{II.28}$$

pour $0 \leqq a \leqq 1$.

Pour montrer ce résultat il revient au même de montrer la convergence uniforme par rapport à :

$$\alpha = \frac{(n-1)\,a - (r-1)}{\sqrt{r}}\,, \qquad \frac{r-1}{\sqrt{r}} < \alpha < \frac{n-r}{\sqrt{r}} \tag{II.29}$$

et d'appliquer au premier membre de (II.28) le théorème de Lebesgue en montrant que l'intégrale de ce premier membre converge vers $\frac{1}{\sqrt{2\pi\,(1-k)}}\,e^{-t^2/2(1-k)}$, et qu'il peut être majoré par une fonction $Y(v)$ indépendante de n telle que $\int Y(v)\,dv < \infty$.

Le premier point se montre aisément en mettant l'intégrande sous la forme :

$$\exp\left[(r-1)\,\log\left(1 + \frac{v\sqrt{r}}{r-1}\right) + (n-r)\,\log\left(1 - \frac{\sqrt{r}}{n-r}\,v\right)\right] \tag{II.30}$$

Comme on a :

$$(r-1)\,\log\left(1 + \frac{v\sqrt{r}}{r-1}\right) = v\sqrt{r} - \frac{v^2}{2}\,\frac{r}{r-1} + 0\,(r\,;\,v) \tag{II.31}$$

$$(n-r)\,\log\left(1 + \frac{v\sqrt{r}}{r-1}\right) = -v\sqrt{r} - \frac{v^2}{2}\,\frac{r}{n-r} + 0\,(r\,;\,v) \tag{II.31 bis}$$

où pour V fini $0\,(r\,;\,v)$ tend vers 0 avec $\frac{1}{r}$, on voit que (II.30) admet pour limite :

$$\exp\frac{-v^2}{2\,(1-k)} \tag{II.32}$$

Il reste à trouver Y(v) ; on a :

$$(n - r) \log \left(1 - \frac{\sqrt{r}}{n - r} v\right) < - \sqrt{r}\, v \qquad \text{(II.33)}$$

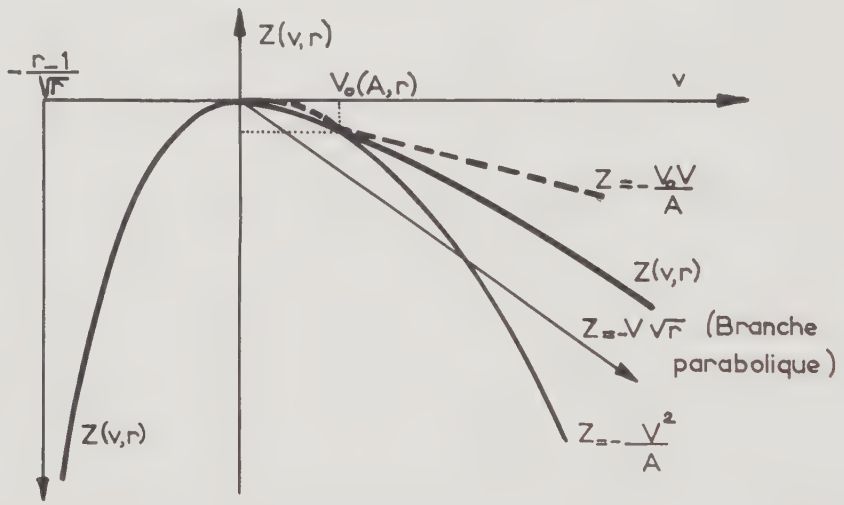
donc l'intégrale est toujours majorée par :

$$e^{Z(v,r)} = \exp \left[(r - 1) \left(\log \left(1 + \frac{v\sqrt{r}}{r - 1}\right) - \frac{v\sqrt{r}}{r - 1} \right) \right] \qquad \text{(II.34)}$$

Si v est suffisamment faible, comme la quantité Z(v , r) entre crochets est équivalente à $-\frac{v^2}{2}$, (II.34) sera majoré par $e^{-v^2/A}$ où A > 2 ; il en sera de même si $-\frac{r-1}{\sqrt{r}} \leqq v < 0$; en revanche quand $v \longrightarrow \infty$, $-\frac{v^2}{A}$ tend vers $-\infty$ plus vite que cette quantité Z(v , r) ; il existe donc (voir la figure ci-dessous) une valeur $v_o(A , r)$ de v où ce crochet est égal à $-v^2/A$. Pour $v > v_o$ on aura donc comme majoration de (II.34) :

$$\exp \left[- \frac{v_o(A , r)\, v}{A} \right] < e^{-v} \qquad \text{(II.35)}$$

à condition de prendre r assez grand : en effet $v_o(A , r)$ croît et tend vers l'infini avec r.



Ainsi nous pourrons choisir Y(v) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} Y(v) &= e^{-v^2/A} \qquad \text{si} \quad v < 0 \\ Y(v) &= \sup(e^{-v^2/A},\ e^{-v}) \qquad \text{si} \quad v \geqq 0 \end{aligned} \qquad \text{(II.36)}$$

On a bien $\int Y(v)\, dv < \infty$, ce qui achève la démonstration.

Remarque - Pour k = 1 le lemme se modifie et on verrait de la même façon que :

$$\frac{n!}{(r - 1)!\ (n - r)!} \int_o^a u^{r-1}(1 - u)^{n-r}\, du - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{(n-1)a-(r-1)}{\sqrt{n-r}}} e^{-t^2/2}\, dt \xrightarrow[u]{} 0 \qquad \text{(II.28 bis)}$$

Nous allons énoncer maintenant le résultat principal de ce chapitre :

THEOREME II.5 - Pour que X_r^*, soit asymptotiquement indépendant de X_r^* en probabilité (ou l'inverse) il suffit que l'on ait l'une des conditions suivantes :

$$\frac{r}{r'} \longrightarrow 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{n-r+1}{n-r'+1} \longrightarrow 0$$

Si de plus F(x) est continue, la propriété devient nécessaire et suffisante.

Les conditions indiquées étant symétriques, nous ne nous occuperons que de la première condition.

Condition suffisante :

Il nous faut montrer l'existence d'un domaine Δ_n de x_r dont la probabilité $1-\varepsilon$ est aussi proche de 1 qu'on le désire, et tel que :

$$\delta_n(x_r) = \sup_{\substack{x_{r'} > x_r \\ x_r \in \Delta_n}} |F_n(x_{r'} ; x_r) - F_n(x_{r'})| \tag{II.37}$$

converge vers 0 avec $\frac{1}{n}$. On a :

$$\delta_n(x_r) \leq \sup_{\substack{b \leq a \leq 1 \\ b \in \Delta_n}} \left| \frac{n!}{(r'-1)!\,(n-r')!} \int_o^a u^{r'-1}(1-u)^{n-r'}\,du - \frac{(n-r)!}{(r'-r-1)!\,(n-r')!} \int_o^{\frac{a-b}{1-b}} u^{r'-r-1}(1-u)^{n-r'}\,du \right| \tag{II.38}$$

Nous allons d'abord supposer que $r \longrightarrow \infty$, et que $\frac{r'}{n} \leq K < 1$, $\frac{r'}{n}$ pouvant tendre vers 0.

Posons :

$$b = \frac{B\sqrt{r} + r - 1}{n-1} \tag{II.39}$$

Définissons le domaine Δ_n par les inégalités $-B_o < B < B_o$, où l'on se donne B_o positif ; comme $\frac{r}{r'} \longrightarrow 0$, on voit que $\frac{r}{n} \longrightarrow 0$; en appliquant le lemme précédent on voit donc que :

$$\text{Prob}\,[b \in \Delta_n] \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-B_o}^{B_o} e^{-t^2/2}\,dt \tag{II.40}$$

En choisissant B_o assez grand cette limite peut être rendue égale à $1-\varepsilon$.

Si r'/n converge vers une limite nulle ou non (mais < 1), on peut appliquer le lemme aux deux termes de (II.38) ; sinon, il conviendra de l'appliquer à un ensemble de sous-suites convergentes de r'/n (et on désignera par k le point d'accumulation correspondant à la sous-suite considérée). Supposons que $\frac{r'}{n} \longrightarrow k$ (éventuellement nul). Nous voyons d'après le lemme que la convergence vers 0 du second membre de (II.38) est équivalente à :

$$\sup_{\substack{b < a < 1 \\ b \in \Delta_n}} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-k)}} \int_{-\infty}^{\frac{(n-1)a-(r'-1)}{\sqrt{r'-r}}} e^{-t^2/2(1-k)}\,dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-k)}} \int_{-\infty}^{\frac{(n-r-1)\left(\frac{a-b}{1-b}\right)-(r'-r-1)}{\sqrt{r'-r}}} e^{-t^2/2(1-k)}\,dt \right| \longrightarrow 0 \tag{II.41}$$

Remplaçons b par (II.39) ; il nous faut montrer la convergence uniforme vers 0 par rapport à a. Posons :

$$a = \frac{A\sqrt{r'} + r' - 1}{n-1} \tag{II.42}$$

il est suffisant de montrer la convergence uniforme vers 0 par rapport à $A \in R$. Choisissons A_o assez grand pour que :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-k)}} \int_{|t| \geq A_o} e^{-t^2/2(1-k)}\,dt < \varepsilon \tag{II.43}$$

Nous montrerons la convergence uniforme dans $]-A_o, A_o[$ et dans $R -]-A_o, A_o[$.

Dans le premier cas on peut majorer $e^{-t^2/2(1-k)}$ par 1, ce qui permettra de majorer (II.41) par (II.44) :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-k)}}\left| A - \frac{1}{r'-r}\left\{\frac{(n-r-1)(r'-r+A\sqrt{r'}-B\sqrt{r})}{n-r-B\sqrt{r}} - (r'-r-1)\right\}\right| \qquad (II.44)$$

En simplifiant il vient :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-k)}}\left| A - \frac{1}{\sqrt{r'-r}}\,\frac{n-r'+A\sqrt{r'}(n-r-1)+(n-r')B\sqrt{r}}{n-r-B\sqrt{r}}\right| \qquad (II.45)$$

soit en majorant :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-k)}}\left\{ A_o\left|1-\sqrt{\frac{r'}{r'-r}}\,\frac{n-r-1}{|n-r-B_o\sqrt{r}|}\right| + \frac{1}{\sqrt{r'-r}}\,\frac{(n-r')(1+B_o\sqrt{r})}{n-r-B_o\sqrt{r}}\right\} \qquad (II.46)$$

Quand $n \longrightarrow \infty$, comme $r/r' \longrightarrow 0$, (II.46) converge vers 0 ; ainsi (II.38) converge uniformément vers 0 dans $]-A_o, +A_o[$.

Dans le deuxième cas supposons que $A < -A_o$; pour se ramener au cas où $A > A_o$, il suffira de retrancher de 1 les deux intégrales de (II.41) puisque :

$$\int_{-\infty}^{-A}\frac{e^{-t^2/2(1-k)}}{\sqrt{2\pi(1-k)}}\,dt = 1 - \int_{A}^{+\infty}\frac{e^{-t^2/2(1-k)}}{\sqrt{2\pi(1-k)}}\,dt \qquad (II.47)$$

La première intégrale de (II.41) est majorée par :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-k)}}\int_{-\infty}^{-A_o} e^{-t^2/2(1-k)}\,dt < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (II.48)$$

La deuxième intégrale est majorée par :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-k)}}\int_{-\infty}^{\frac{1}{\sqrt{r'-r}}\frac{A_o\sqrt{r'}(n-r-1)+(n-r')(1+B\sqrt{r})}{n-r-B\sqrt{r}}} e^{-t^2/2(1-k)}\,dt \qquad (II.49)$$

expression qui converge vers la précédente quand $n \longrightarrow \infty$; (II.49) est donc pour n assez grand majoré par $\frac{\varepsilon}{2}$, donc (II.41) par ε (pour tout a).

Si maintenant :

$$\frac{r'}{n} \longrightarrow 1 \qquad (II.50)$$

On pourra toujours trouver r_1 tel que $r/r_1 \longrightarrow 0$ et $r_1/n \longrightarrow 0$; $X^*_{r_1}$ sera donc d'après ce qu'on a vu, asymptotiquement indépendant de X^*_r ; il en sera donc de même de $X^*_{r'}$ par rapport à X^*_r (théorème II.4), puisque $r < r_1 < r'$.

Si r est fini, il existe toujours r_1 avec $r < r_1 < r'$ tel que $r_1/r' \longrightarrow 0$, et $r_1 \longrightarrow \infty$; le même théorème II.4 nous montre que $X^*_{r'}$ est asymptotiquement indépendant de X^*_r puisqu'il l'est de $X^*_{r_1}$.

Condition nécessaire :

Si on suppose F(x) continue, l'inégalité (II.38) devient une égalité. Nous allons raisonner a contrario en supposant que :

$$\frac{r'}{r} \not\to 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{n-r'+1}{n-r+1} \not\to 0 \qquad (II.51)$$

On pourra toujours extraire une suite de n telle que $r/r' \longrightarrow \lambda$, avec $\lambda > 0$. Nous allons montrer que si $\lambda < 1$, il ne peut y avoir indépendance asymptotique. Mais si $\lambda = 1$: ou bien r' est

équivalent à n (ainsi que r), et on est amené à raisonner de façon analogue en supposant $\frac{n - r' + 1}{n - r + 1} \longrightarrow \mu$; ou bien r' n'est pas équivalent à n, et dans ce cas si $X^*_{r'}$ était indépendant à la limite de X^*_r, elle le serait de $X^*_{r'/2}$ puisque pour n assez grand $r > r'/2$ (théorème II.4), ce qui correspond à $\lambda = \frac{1}{2}$, $\frac{r'}{n} \longrightarrow k < 1$; comme on va voir que dans ce cas il ne peut y avoir indépendance limite, nous voyons qu'il y a contradiction : $X^*_{r'}$ n'est pas indépendant de X^*_r à la limite.

Nous supposerons donc $0 < \lambda < 1$, et dans un premier temps nous supposerons aussi que $\frac{r'}{n} \longrightarrow k < 1$ et que r augmente indéfiniment ($r \longrightarrow \infty$). Il est alors équivalent de montrer que (II.41) ne converge pas vers 0 ; en effectuant les transformations (II.39) et (II.42) avec $b \in \Delta_n$, en se fixant A, l'expression intérieure à "sup" de (II.41) s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-k)}} \int_{\Phi_n(A)}^{A} e^{-t^2/2(1-k)}\, dt \qquad (II.52)$$

où :

$$\Phi_n(A) = \frac{1}{\sqrt{r' - r}} \frac{n - r' + A\sqrt{r'(n - r - 1)} + (n - r')\, B\sqrt{r}}{n - r - B\sqrt{r}} \qquad (II.53)$$

Quand $n \longrightarrow \infty$, cette dernière expression a pour limite (A et B étant fixes) :

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(A) = -\frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \frac{1}{1 - k\lambda} [A(1 - k\lambda) + (1 - k)\, B\sqrt{\lambda}] \qquad (II.54)$$

Pour A et B finis cette limite est strictement différente de A sur un ensemble de B de probabilité $1 - \varepsilon$, ce qui écarte l'indépendance limite. Afin de déterminer notre démonstration, nous avons à examiner deux cas particuliers :

$$\frac{r'}{n} \longrightarrow 1 \qquad \text{et} \qquad r \not\longrightarrow \infty$$

- Dans le premier cas, on a :

$$\lim \frac{n - r' + 1}{n - r + 1} = \lim \frac{1 - r'/n}{1 - r/n} = 0 \qquad (II.55)$$

On est donc dans le cas prévu pour l'indépendance que nous avons éliminé par (II.51).

- Dans le deuxième cas, si $r \not\longrightarrow \infty$, on peut toujours extraire une sous-suite de r où r est fini. Alors si r est cette sous-suite, r' est aussi finie (ou du moins on peut trouver une sous-suite de r' où r' est finie). Supposons que $X^*_{r'}$ soit indépendant de X^*_r à la limite : d'après le théorème II.4, elle le sera aussi de X_1. Nous montrons qu'il y a contradiction en donnant un ensemble de b de probabilité non nulle où $\delta_n(x_1)$ ne converge pas vers 0.

Pour cela nous utiliserons la relation suivante obtenue par une intégration par partie et décomposition de l'intégrale obtenue :

$$\frac{n!}{(r' - 1)!\,(n - r')!} \int_o^a u^{r'-1} (1 - u)^{n-r'}\, du = \frac{-(n-1)!}{(r' - 1)!\,(n - r')!}\, a^{r'-1} (1 - a)^{n-r'+1}$$

$$+ \frac{(n-1)!}{(r' - 2)!\,(n - r')!} \int_o^a u^{r'-2} (1 - u)^{n-r'}\, du \qquad (II.56)$$

En portant ce résultat dans (II.38) où on a fait r = 1, (II.38) s'écrit :

$$\sup_{\substack{b \le a \le 1 \\ b \in \Delta_n}} \left| \frac{-(n-1)!}{(r' - 1)!\,(n - r')!}\, a^{r'-1} (1 - a)^{n-r'+1} + \frac{(n-1)!}{(r' - 2)!\,(n - r')!} \int_{\frac{a-b}{1-b}}^{a} u^{r'-2} (1 - u)^{n-r'}\, du \right| \qquad (II.57)$$

Soit $A(r') > 0$ tel que :

$$(r' - 1)! = A(r')\, (r' - 1)^{r'-1}\, e^{-(r'-1)} \sqrt{r'} \qquad (II.58)$$

On majore le deuxième terme de (II.57) par :

$$\frac{(n-1)!}{(r'-2)!\,(n-r')!}\;\frac{b\,(1-a)}{1-b}\;\max_{0<\theta<1}\;\theta^{r'-2}(1-\theta)^{n-r'} \tag{II.59}$$

Comme :

$$\max_{0<\theta<1}\;\theta^{r'-2}\;(1-\theta)^{n-r'}\;=\;\frac{(r'-2)^{r'-2}\,(n-r')^{n-r'}}{(n-2)^{n-2}}$$

On voit que (II.59) est majoré par (formule de Stirling) :

$$\frac{n}{\sqrt{r'-1}}\,A(r')\times b \tag{II.61}$$

La f.r. de b est $1-(1-b)^n$. L'ensemble Δ_n: $b \leqq \frac{\alpha}{n}$ aura donc pour probabilité :

$$1-\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^n \sim 1-e^{-\alpha} \tag{II.62}$$

et, dans ce domaine, on peut rendre le deuxième terme de (II.57) inférieur à :

$$\frac{A(r')}{\sqrt{r'-1}}\,\alpha \tag{II.63}$$

On peut rendre le premier terme de (II.57) maximum avec :

$$a=\frac{r'-1}{n-r'+1}$$

ce maximum sera équivalent à :

$$\frac{A(r')}{\sqrt{r'-1}} \tag{II.64}$$

Si nous choisissons $\alpha=\frac{1}{2}$, nous voyons que dans une région de b de probabilité $1-e^{-\frac{1}{2}}>0$, (II.57) est minoré en module par $\frac{1}{2}\,A(r')/\sqrt{r'-1}$, pour n assez grand. Puisque r' est fini, nous avons montré notre proposition.

Remarque - La restriction de la condition nécessaire aux seules répartitions continues est bien compréhensible car les f.r. limites de X_r^* et $X_{r'}^*$ peuvent être unitaires si F(x) a des discontinuités; dans ce cas l'indépendance limite est triviale, car il s'agit de v.a. presque certaines.

II.2.3 - Adaptation des résultats précédents à l'indépendance limite presque complète

L'adaptation du théorème II.4 s'énonce ainsi :

THEOREME II.6 - Si $X_{r''}^*$ est asymptotiquement indépendante de X_r^*, presque complètement ($r''>r'$), $X_{r''}^*$ l'est aussi de tout X_r où $r<r'$

Pour montrer que $X_{r''}^*$ est asymptotiquement presque complètement indépendante de X_r^*, nous devons montrer que si Ω_n^c est le domaine de x_r où :

$$\sup_{x_{r''}}\;|F_n(x_{r''}\;;\;x_r)-\;{}_n(x_{r''})|>\varepsilon \tag{II.65}$$

On a :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega_n^c}\;dF_n(x_r)<\infty \tag{II.66}$$

Pour cela, raisonnons par l'absurde en supposant que la série diverge. Comme $X^*_{r''}$ est presque complètement indépendant à la limite de $X^*_{r'}$, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n = \sum_{n=1}^{\infty} \iint_{\substack{x_{r'} \in R - \Delta_n \\ x_r \in R}} dF_n(x_r)\, dF_n(x_{r'}\ ;\ x_r) < \infty \qquad (II.67)$$

On diminue la valeur de la somme de cette série en prenant $x_r \in \Omega_n^c$.

D'autre part les inégalités (II.19) et (II.65) montrent que si $x_r \in \Omega_n^c$:

$$\int_{x_{r'} \in R - \Delta_n} dF_n(x_{r'}\ ;\ x_r) > \varepsilon \qquad (II.68)$$

Nous pouvons donc a fortiori affirmer que :

$$\infty = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_r \in \Omega_n^c} dF_n(x_r) < \infty \qquad (II.69)$$

Il y a donc une contradiction, d'où le résultat.

Quant au théorème II.5, il devient :

THEOREME II.7 - Pour que $X^*_{r'}$ soit presque complètement asymptotiquement indépendant de X^*_r (quand $r/r' < K < 1$) il faut et il suffit que, $F(x)$ étant connue, il existe une fonction 0 telle que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!} \left[\int_0^{\sup\left(0,\ \frac{-\sqrt{r}\,0\left(\sqrt{\frac{r'}{r}}\right)+r-1}{n-1}\right)} u^{r-1}(1-u)^{n-r}\, du + \int_{\frac{\sqrt{r}\,0\left(\sqrt{\frac{r'}{r}}\right)+r-1}{n-1}}^{1} u^{r-1}(1-u)^{n-r}\, du \right] < \infty \qquad (II.70)$$

On a désigné ici par $0(t)$ une fonction telle que :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{0(t)}{t} = 0$$

On peut toujours remplacer $0(t)$ par εt et écrire que (II.70) est vraie, quelque soit $\varepsilon > 0$.

Bien entendu la condition reste suffisante si $\frac{r'}{r} \longrightarrow 1$, mais elle n'est plus nécessaire.

Condition suffisante :

Choisissons sur (II.46) $B_o = 0\left(\frac{r'}{r}\right)$; alors (II.46) donc (II.38) converge vers 0 et pour $A \in]-A_o, +A_o[$ uniformément ; si A est en dehors de cet intervalle, (II.49) est encore majoré par $\varepsilon/2$. Ainsi dans le domaine de b tel que $|B| > B_o$, on doit avoir :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!} \int_{\substack{|B| > B_o \\ 0<b<1}} u^{r-1}(1-u)^{n-r}\, du < \infty \qquad (II.71)$$

et a fortiori la série relative au domaine de non convergence de (II.38), converge, puisque (II.71) est égale à (II.70).

Condition nécessaire :

Comme $r'/r \longrightarrow 0$, en se fixant A, on voit sur (II.52) et sur (II.53), que le domaine où (II.41) ne converge pas vers 0 quand $n \longrightarrow \infty$, est confondu avec le domaine où, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$|B| > \varepsilon \sqrt{\frac{r'}{r}} \qquad (II.72)$$

Ainsi pour que $X^*_{r'}$ soit asymptotiquement presque complètement indépendant de X^*_r, il est nécessaire que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(r-1)!\ (n-r)!} \int_{\substack{|B|>\epsilon\sqrt{\frac{r'}{r}} \\ 0<b<1}} u^{r-1}\ (1-u)^{n-r}\ du < \epsilon\ , \tag{II.73}$$

ce qui est équivalent à (II.70).

Cas particulier : théorème de Geffroy

Ce théorème affirme que les valeurs extrêmes sont asymptotiquement presque complètement indépendantes. En effet, si on pose (α et β fixes) :

$$r' = n - \beta \quad \text{et} \quad r = \alpha\ ,$$

la série (II.70) a son terme général équivalent à :

$$\frac{n!}{(\alpha-1)!\ (n-\alpha)!} \int_{\frac{0\ (\sqrt{n})}{n}}^{1} u^{\alpha-1}\ (1-u)^{n-\alpha}\ du \tag{II.74}$$

Comme l'intégrande est décroissant dans le champ d'intégration il suffit de démontrer pour tout $\varepsilon > 0$ la convergence de la série majorante de terme général :

$$n^{\alpha} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^{n-\alpha} \tag{II.75}$$

majoré par :

$$n^{\alpha/2}\ \exp\left[-\varepsilon\sqrt{n}\right] \tag{II.76}$$

qui est le terme général d'une série convergente.

CHAPITRE III

ÉTUDE DE L'INDÉPENDANCE LIMITE DE LA MOYENNE PAR RAPPORT AUX VALEURS EXTRÊMES D'UN ÉCHANTILLON

III.1 - INDEPENDANCE LIMITE EN PROBABILITE DE LA MOYENNE PAR RAPPORT AUX VALEURS EXTREMES

III.1.1 - Expression de la fonction caractéristique de la somme conditionnellement aux valeurs extrêmes

Dans ce qui va suivre nous désignerons respectivement les valeurs extrêmes (généralisées) inférieure d'ordre α et supérieure d'ordre β (α et β sont des entiers positifs et fixes) par X^*_α et $X^*_{n-\beta+1}$; les raisonnements seront souvent conditionnels à $X^*_\alpha = x_\alpha$ et $X^*_{n-\beta+1} = x_{n-\beta+1}$.

Par définition la somme S_n est la v.a.

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n = X_1^* + \ldots + X_n^* \tag{III.1}$$

On désignera par $\Phi_n(s)$ la fonction de répartition de S_n quand elle est marginale, et par $\Phi_n(s\ ;\ x_\alpha,\ x_{n-\beta+1})$ la même fonction de répartition conditionnelle à $X^*_\alpha = x_\alpha$ et $X^*_{n-\beta+1} = x_{n-\beta+1}$.

D'après le théorème II.1, toujours de façon conditionnelle, les trois groupes de v.a.

$$\begin{gathered} X_1^*, \ldots, X_{\alpha-1}^* \\ X_{\alpha+1}^*, \ldots, X_{n-\beta}^* \\ X_{n-\beta+2}^*, \ldots, X_n^* \end{gathered} \tag{III.2}$$

peuvent être considérés comme des échantillons ordonnés de tailles respectives $\alpha - 1$, $n - \beta - \alpha$, $\beta - 1$ de v.a. indépendantes de loi $F(x)$ tronquée respectivement supérieurement en x_α, puis inférieurement en x_α et supérieurement en $x_{n-\beta+1}$, et enfin inférieurement en $x_{n-\beta+1}$, les échantillons étant indépendants entre eux. Enfin, toujours dans les mêmes conditions, X^*_α et $X^*_{n-\beta+1}$ sont des variables certaines.

Ainsi la fonction caractéristique de S_n (conditionnelle) soit $\varphi_n(t\ ;\ x_\alpha,\ x_{n-\beta+1})$ s'écrit :

$$\varphi_n(t\ ;\ x_\alpha,\ x_{n-\beta+1}) = \left[\int_{-\infty}^{x_\alpha} e^{itx}\,\frac{dF(x)}{F(x_\alpha)}\right]^{\alpha-1} e^{itx_\alpha} \left[\int_{x_\alpha}^{x_{n-\beta+1}} e^{itx}\,\frac{dF(x)}{F(x_{n-\beta+1}) - F(x_\alpha)}\right]^{n-\beta-\alpha}$$

$$\times\, e^{itx_{n-\beta+1}} \left[\int_{n-\beta+1}^{+\infty} e^{itx}\,\frac{dF(x)}{1 - F(x_{n-\beta+1})}\right]^{\beta-1} \tag{III.8}$$

III.1.2 - Convergence de S_n vers la loi normale

Dans tout ce qui va suivre, nous allons supposer que S_n converge vers la loi normale. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est l'existence d'une suite C_n de réels positifs, tels que, quand $n \longrightarrow \infty$:

$$\begin{gathered} n(1 - F(C_n) + F(-C_n)) \longrightarrow 0 \\ C_n/B_n \longrightarrow 0 \end{gathered} \tag{III.4}$$

avec :

$$B_n^2 = n \left[\int_{-C_n}^{+C_n} x^2 \, dF(x) - \left(\int_{-C_n}^{+C_n} x dF \right)^2 \right] \qquad \text{(III. 6)}$$

Dans ce cas tous les moments d'ordre inférieur à 2 (et en particulier le moment du premier ordre) existent. On pourra trouver l'énoncé et la démonstration de ces résultats dans GNEDENKO-KOLMOGOROV [9](1). Nous allons donner ici une démonstration de la condition suffisante, car nous aurons besoin dans la suite de certains résultats intermédiaires figurant dans cette démonstration.

Posons :

$$A_n = n \int_{-C_n}^{+C_n} x dF \qquad \text{(III. 7)}$$

Nous allons montrer qu'avec les hypothèses (III. 4) et (III. 5), on a :

$$\Phi_n(B_n s + A_n) \xrightarrow[u]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{s} e^{-\theta^2/2} \, d\theta \qquad \text{(III. 8)}$$

Il nous suffit du reste, car la loi normale est continue, de montrer la convergence en loi (théorème de Polyã ; voir par exemple DUGUE [6](2)). Soit $\varphi_n(t)$ la fonction caractéristique correspondant à $\Phi_n(S)$; on a :

$$e^{-it\frac{A_n}{B_n}} \varphi_n \left(\frac{t}{B_n}\right) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[it \left(\frac{x - A_n/n}{B_n} \right) \right] dF(x) \right]^n \qquad \text{(III. 9)}$$

donc :

$$\log \left(e^{-it\frac{A_n}{B_n}} \varphi_n \left(\frac{t}{B_n}\right) \right) = n \log \left[1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\exp \left(it \left(\frac{x - A_n/n}{B_n} \right) \right) - 1 \right] dF(x) \right] \qquad \text{(III. 10)}$$

l'intégrale figurant dans (III. 10) est uniformément convergente ; l'intégrande tend vers 0 quand $n \longrightarrow \infty$, donc l'intégrale tend vers 0 ; ainsi (III. 10) a la même limite que :

$$I_n = n \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\exp \left[it \left(\frac{x - A_n/n}{B_n} \right) \right] - 1 \right] dF(x) \qquad \text{(III. 11)}$$

On peut partager le champ d'intégration en $|x| \geq C_n$ (qui donne I_n^1) et $|x| < C_n$ (I_n^2), soit $I_n = I_n^1 + I_n^2$. Nous allons montrer que I_n^1 converge vers 0 :

$$|I_n^1| \leq 2n(1 - F(C_n) + F(-C_n)) \longrightarrow 0 \qquad \text{(III. 12)}$$

d'autre part, si on développe l'intégrande de I_n^2 jusqu'au deuxième ordre, il vient :

$$I_n^2 = -\frac{nt^2}{2} \int_{|x| < C_n} \exp \left[it \, \frac{\theta_n - \int_{-C_n}^{+C_n} x dF}{B_n} \right] \frac{\left(x - \int_{-C_n}^{+C_n} x dF \right)^2}{B_n^2} \, dF(x) \qquad \text{(III. 13)}$$

où $0 < \theta_n < x$, donc $|\theta_n| < C_n$. Le terme du premier ordre a disparu du fait du choix de A_n.

Si on applique la formule de la moyenne à la partie réelle et à la partie imaginaire de (III. 13) on obtient, en tenant compte de la valeur de B_n :

$$I_n^2 = -\frac{t^2}{2} \left[\cos \left[\frac{t \left(\theta_n^1 - \int_{-C_n}^{+C_n} x dF(x) \right)}{B_n} \right] + i \sin \left[\frac{t \left(\theta_n^2 - \int_{-C_n}^{+C_n} x dF \right)}{B_n} \right] \right] \qquad \text{(III. 14)}$$

avec $|\theta_n^j| < C_n$ $(j = 1, 2)$.

---

(1) P. 131-132.

(2) P. 32.

Quand n tend vers l'infini, comme C_n/B_n converge vers 0, on voit que le cos tend vers 1 et le sin vers 0, donc :

$$\lim_{n\to\infty} I_n^2 = \lim_{n\to\infty} I_n = -1/2\ t^2 \qquad \text{(III.15)}$$

uniformément pour $|t| < T$.

Les suites A_n et B_n conduisent ainsi à la limite cherchée (loi normale).

III.1.3 - Théorème de l'indépendance limite de la somme par rapport aux valeurs extrêmes

THEOREME III.1 - Si la loi limite de la moyenne de l'échantillon est normale, celle-ci est asymptotiquement strictement indépendante en probabilité des valeurs extrêmes inférieure et supérieure, d'ordre respectif α et β finis.

Ce résultat généralise les résultats obtenus en [20] dans le cas de l'indépendance limite uniforme (avec $\alpha = \beta = 1$), en [24] et [19] dans le cas de l'indépendance limite légale.

DEMONSTRATION - Il est bien entendu équivalent de montrer la proposition sur la somme ; nous devons montrer que, dans un domaine de X_α^* et de $X_{n-\beta+1}^*$ dont la probabilité est pour n assez grand, supérieure à $1 - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$, donné), on a :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_s |\Phi_n(s\ ;\ x_\alpha, x_{n-\beta+1}) - \Phi_n(s)| = 0 \qquad \text{(III.16)}$$

ou, autrement dit, dans les mêmes conditions :

$$\Phi_n(s\ ;\ x_\alpha\ ,\ x_{n-\beta+1}) - \Phi_n(s) \longrightarrow 0 \qquad \text{(III.17)}$$

uniformément pour $s \in R$. Il revient au même de démontrer le résultat pour :

$$\Phi_n(B_n\ s + A_n\ ;\ x_\alpha\ ,\ x_{n-\beta+1}) - \Phi_n(B_n\ s + A_n) \xrightarrow[u]{} 0 \qquad \text{(III.18)}$$

donc, d'après (III.8) de montrer que :

$$\Phi_n(B_n\ s + A_n\ ;\ x_\alpha\ ,\ x_{n-\beta+1}) \xrightarrow[u]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{s} e^{-\theta^2/2}\ d\theta \qquad \text{(III.19)}$$

Il est donc équivalent de montrer, que, uniformément dans $|t| \leqq T$:

$$K_n = e^{-it\,A_n/B_n}\ \varphi_n\left(\frac{t}{B_n}\ ;\ x_\alpha\ ,\ x_{n-\beta+1}\right) \longrightarrow e^{-t^2/2} \qquad \text{(III.20)}$$

D'après (III.3), la valeur de K_n est :

$$K_n = h_n^1\ h_n^2\ h_n^3\ h_n^4\ h_n^5$$

avec :

$$\left[\begin{array}{l} h_n^1 = \left(\int_{-\infty}^{x_\alpha} e^{it(x/B_n)}\ \dfrac{dF(x)}{F(x_\alpha)}\right)^{\alpha-1} \\ h_n^2 = e^{it(x_\alpha/B_n)} \\ h_n^3 = \left(\exp\left[-it\ \dfrac{A_n}{B_n}\ \dfrac{\alpha+\beta}{n(n-\alpha-\beta)}\right] \int_{x_\beta}^{x_{n-\beta+1}} \exp\left[it\left(\dfrac{x - A_n/n}{B_n}\right)\right]\ \dfrac{dF(x)}{F(x_{n-\beta+1}) - F(x_\alpha)}\right)^{n-\beta-\alpha} \\ h_n^4 = e^{it(x_{n-\beta+1}/B_n)} \\ h_n^5 = \left(\int_{x_{n-\beta+1}}^{+\infty} e^{it(x/B_n)}\ \dfrac{dF(x)}{1 - F(x_{n-\beta+1})}\right)^{\beta-1} \end{array}\right. \qquad \text{(III.21)}$$

Nous allons définir le domaine de X_α^* et $X_{n-\beta+1}^*$ par les inégalités suivantes :

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{B}{n} < F(x_\alpha) < \dfrac{A}{n} \Longleftrightarrow x_\alpha \in \Delta_n^1 \\ \text{et} \\ \dfrac{B}{n} < 1 - F(x_{n-\beta+1}) < \dfrac{A}{n} \Longleftrightarrow x_{n-\beta+1} \in \Delta_n^2 \end{array}\right. \tag{III.22}$$

où $A > 0$ et $B > 0$ sont fixes, mais choisis en fonction de ε, A assez grand, B assez petit, d'une façon définie ci-dessous.

Comme X_α^* et $X_{n-\beta+1}^*$ sont asymptotiquement uniformément indépendantes (comme conséquence du théorème II.5) on a, d'après le théorème I.2, pour n assez grand :

$$|\text{Prob}\,[X_\alpha^* \in \Delta_n^1,\ X_{n-\beta+1}^* \in \Delta_n^2] - \text{Prob}\,[X_\alpha^* \in \Delta_n^1]\ \text{Prob}\,[X_{n-\beta+1}^* \in \Delta_n^2]| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{III.23}$$

Etudions par exemple,

$$\text{Prob}\,[X_{n-\beta+1}^* \in \Delta_n^2] = \frac{n!}{(n-\beta)!\,(\beta-1)!} \int_{1-\frac{A}{n}}^{1-\frac{B}{n}} u^{n-\beta}(1-u)^{\beta-1}\,du \tag{III.24}$$

Pour cela, en intégrant par parties de façon successives, on voit que :

$$\frac{n!}{(n-\beta)!\,(\beta-1)!} \int_{1-\frac{x}{n}}^{1} u^{n-\beta}(1-u)^{\beta-1}\,du = 1 - \left(1-\frac{x}{n}\right)^n - \ldots - \frac{n!}{(n-\beta+1)!\,(\beta-1)} \left(\frac{x}{n}\right)^{\beta-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-\beta+1} \tag{III.25}$$

Si $x > 0$ est fixe et si $n \longrightarrow \infty$, la limite de cette expression est :

$$1 - e^{-x}\left[1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^{\beta-1}}{(\beta-1)!}\right] \tag{III.26}$$

donc :

$$\text{Prob}\left[X_{n-\beta+1}^* \in \Delta_n^2\right] \longrightarrow e^{-B}\left[1 + \frac{B}{1!} + \ldots + \frac{B^{\beta-1}}{(\beta-1)!}\right] - e^{-A}\left[1 + \frac{A}{1!} + \ldots + \frac{A^{\beta-1}}{(\beta-1)!}\right] \tag{III.27}$$

Pour B assez petit le prémier terme de cette limite est supérieure à $1 - \frac{\varepsilon}{6}$, et pour A assez grand, le deuxième terme est inférieur à $\frac{\varepsilon}{6}$ (car β est fini). Ainsi pour n assez grand :

$$\text{Prob}\,[X_{n-\beta+1}^* \in \Delta_n^2] > 1 - \frac{\varepsilon}{3} \tag{III.28}$$

On verrait de même que :

$$\text{Prob}\,[X_\alpha^* \in \Delta_n^1] > 1 - \frac{\varepsilon}{3} \tag{III.29}$$

(III.23) montre donc qu'on a

$$\text{Prob}\,[X_\alpha^* \in \Delta_n^1,\ X_{n-\beta+1}^* \in \Delta_n^2] > 1 - \varepsilon \tag{III.30}$$

Etudions maintenant les h_n^i. Remarquons pour cela que, dans le domaine envisagé $nF(x_\alpha)$ et $n(1 - F(x_{n-\beta+1}))$ sont supérieurs à B alors que $nF(-C_n)$ et $n(1 - F(C_n))$ convergent vers 0. Donc pour n assez grand x_α est supérieur à $-C_n$ et $x_{n-\beta+1}$ inférieur à C_n ; ainsi,

$$\left|\frac{x_\alpha}{B_n}\right| < C_n/B_n \longrightarrow 0 \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{x_{n-\beta+1}}{B_n}\right| < \frac{C_n}{B_n} \longrightarrow 0 \tag{III.31}$$

ce qui montre, que, uniformément pour $|t| < T$, h_n^2 et h_n^4 convergent vers 1.

Considérons maintenant :

$$(h_n^1)^{\frac{1}{\alpha-1}} = 1 + \frac{1}{F(x_\alpha)} \int_{-\infty}^{-C_n} (e^{itx/B_n} - 1)\, dF(x) + \frac{1}{F(x_\alpha)} \int_{-C_n}^{x_\alpha} (e^{itx/B_n} - 1)\, dF \qquad (III.32)$$

Comme on a :

$$\frac{1}{F(x_\alpha)} \left| \int_{-\infty}^{-C_n} (e^{itx/B_n} - 1)\, dF \right| < \frac{2F(-C_n)}{F(x_\alpha)} < \frac{2nF(-C_n)}{B} \longrightarrow 0 \qquad (III.33)$$

(la deuxième inégalité est une conséquence (III.22))

et :

$$\frac{1}{F(x_\alpha)} \left| \int_{-C_n}^{x_\alpha} (e^{itx/B_n} - 1)\, dF \right| < \frac{1}{B_n F(x_\alpha)} \left| \int_{-C_n}^{x_\alpha} |x|\, dF \right| < \frac{C_n}{B_n} \left[1 - \frac{F(-C_n)}{F(x_\alpha)} \right] < \frac{C_n}{B_n} \longrightarrow 0 \qquad (III.34)$$

On voit que h_n^1 converge vers 1 ; on le verrait de même pour h_n^5 ; ainsi K_n a la même limite que h_n^3 ; nous allons montrer que $\log h_n^3$ converge vers $-t^2/2$, uniformément pour $|t| < T$. En effet :

$$\log h_n^3 = -it \frac{A_n}{B_n} \frac{\alpha+\beta}{n} + (n - \beta - \alpha) \log \left\{ \frac{1}{F(x_{n-\beta+1}) - F(x_\alpha)} \int_{x_\alpha}^{x_{n-\beta+1}} \left(e^{\frac{it}{B_n}(x - A_n/n)} - 1 \right) dF + 1 \right\} \qquad (III.35)$$

Or on a :

$$F(x_{n-\beta+1} - F(x_\alpha) > 1 - \frac{2A}{n} \longrightarrow 1 \qquad (III.36)$$

et l'intégrale, uniformément et absolument convergente, tend vers 0. Comme de plus :

$$\left| it \frac{A_n}{B_n} \frac{\alpha+\beta}{n} \right| < \frac{C^{te}\, T}{B_n} \longrightarrow 0 \qquad (III.37)$$

on voit que $\log h_n^3$ a la même limite que :

$$(n - \beta - \alpha) \int_{x_\alpha}^{x_{n-\beta+1}} \left[\exp \left[\frac{it}{B_n} \left(x - \frac{A}{n - \alpha - \beta} \right) \right] - 1 \right] dF(x) \qquad (III.38)$$

Pour n assez grand x_α et $x_{n-\beta+1}$ sont majorés en module par C_n, on peut écrire :

$$\int_{x_\alpha}^{x_{n-\beta+1}} = \int_{-C_n}^{+C_n} - \int_{-C_n}^{x_\alpha} - \int_{x_{n-\beta+1}}^{C_n} \qquad (III.39)$$

Or on a :

$$(n - \beta - \alpha) \left| \int_{-C_n}^{x_\alpha} \left[e^{it \frac{x - A_n/n}{B_n}} - 1 \right] dF(x) \right| < T \frac{(n - \beta - \alpha)}{B_n} \left| \int_{-C_n}^{x_\alpha} x\, dF \right| + \frac{(n - \beta - \alpha)}{B_n} MT \int_{-C_n}^{x_\alpha} dF(x) \qquad (III.40)$$

$\left(\text{car } \frac{|A_n|}{n} < M, \text{ où } M \text{ est une constante} \right)$.

On peut encore majorer (III.40) par :

$$T \left[\frac{C_n}{B_n} + \frac{M}{B_n} \right] (n - \beta - \alpha)\, (F(x_\alpha) - F(-C_n)) < AT \left[\frac{C_n}{B_n} + \frac{M}{B_n} \right] \frac{n - \beta - \alpha}{n} \qquad (III.41)$$

qui tend vers 0 (uniformément pour $|t| < T$). On montrerait de même que :

$$(n - \beta - \alpha) \int_{x_{n-\beta+1}}^{C_n}$$

converge vers 0. Il reste donc $(n-\beta-\alpha)\int_{-C_n}^{+C_n}$ qui est égal à :

$$(n-\beta-\alpha)\int_{-C_n}^{+C_n}\left[e^{\frac{it}{B_n}(x-A_n/n)}-1\right]dF(x) \qquad \text{(III.42)}$$

qui d'après (III.15) converge uniformément vers $-t^2/2$.

La proposition est donc démontrée.

COROLAIRE AU THEOREME III.1 - Si la variance de la répartition initiale est bornée, le coefficient de corrélation entre la moyenne et une valeur extrême de l'échantillon converge vers 0 quand la taille de l'échantillon augmente indéfiniment.

En effet quand la variance existe la somme tend en loi vers la loi normale, et plus précisément :

$$\frac{S_n - E(S_n)}{(E(S_n - E(S_n))^2)^{1/2}} \qquad \text{(III.43)}$$

converge en loi ; d'autre part il y a indépendance limite uniforme entre S_n et une valeur extrême, cette dernière possédant une variance finie. Il en résulte que d'après le théorème I.5, $r_n \longrightarrow 0$. On retrouve ainsi un résultat directement démontré pour $\alpha = 1$ (ou $\beta = 1$) par BASTENAIRE [2](1).

III.2 - INDEPENDANCE LIMITE PRESQUE COMPLETE DE LA MOYENNE PAR RAPPORT AUX VALEURS EXTREMES

Il suffit d'adapter ce qui vient d'être dit en remplaçant respectivement A et B fixes par $\mathcal{A}(n) \longrightarrow \infty$ et $\mathcal{B}(n) \longrightarrow 0$, de telles façons que :

$$\frac{n(1 - F(C_n) + F(-C_n))}{\mathcal{B}(n)} \longrightarrow 0 \qquad \text{(III.44)}$$

et :

$$\mathcal{A}(n)\frac{C_n}{B_n} \longrightarrow 0 \qquad \text{(III.45)}$$

Dans ce cas, les résultats (notamment ceux relatifs à (III.31) - (III.33) pour (III.43) et celui relatif à (III.41) pour (III.45)) déjà obtenus restent valables ; dans le nouveau domaine analogue à celui défini par les inégalités (III.22) à savoir :

$$\frac{\mathcal{B}(n)}{n} < F(x_\alpha) < \frac{\mathcal{A}(n)}{n} \Longleftrightarrow x_\alpha \in \Delta_n^1$$
$$\frac{\mathcal{B}(n)}{n} < 1 - F(x_{n-\beta+1}) < \frac{\mathcal{A}(n)}{n} \Longleftrightarrow x_{n-\beta+1} \in \Delta_n^2 \qquad \text{(III.46)}$$

la limite (III.16) est toujours valable.

Il suffit donc pour voir qu'il y a indépendance limite presque complète de montrer que :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[1 - \text{Prob}\left[X_\alpha^* \in \Delta_n^1,\ X_{n-\beta+1}^* \in \Delta_n^2\right]\right] < \infty \qquad \text{(III.47)}$$

Or la loi élémentaire du couple X_α^*, $X_{n-\beta+1}^*$ est :

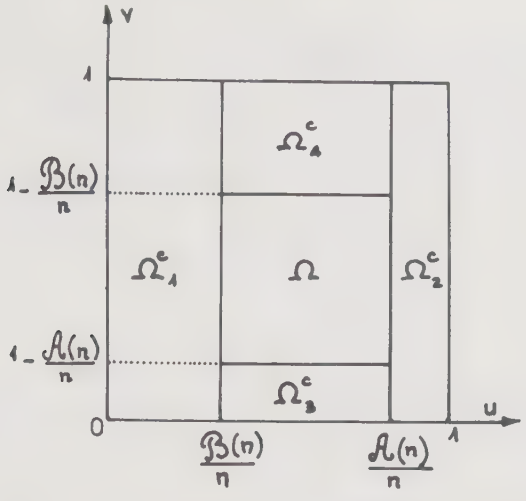
$$\frac{n!}{(\alpha-1)!\,(n-\beta-\alpha)!\,(\beta-2)!}(F_\alpha)^{\alpha-1}(F_{n-\beta+1} - F_\alpha)^{n-\beta-\alpha}(1 - F_{n-\beta+1})^{\beta-1}\,dF_\alpha\,dF_{n-\beta+1} \qquad \text{(III.47)}$$

Il suffit donc d'avoir :

---

(1) P. 130.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \iint_{Q-\Omega} \frac{n!}{(\alpha-1)!\,(n-\beta-\alpha)!\,(\beta-1)!}\, u^{\alpha-1}\,(v-u)^{n-\beta-\alpha}\,(1-v)^{\beta-1}\,du\,dv < \infty \qquad \text{(III.48)}$$



où Q désigne le carré $0 \leqq u \leqq 1$, $0 \leqq v \leqq 1$ et où Ω désigne le domaine correspondant à (III.46).

$$\frac{\mathcal{B}(n)}{n} < u < \frac{\mathcal{A}(n)}{n}$$

$$\frac{\mathcal{B}(n)}{n} < 1 - v < \frac{\mathcal{A}(n)}{n} \qquad \text{(III.49)}$$

On peut, comme on le voit sur la figure considérer :

$$Q - \Omega = \Omega_1^c + \Omega_2^c + \Omega_3^c + \Omega_4^c \qquad \text{(III.50)}$$

Les Ω_i^c sont définis de la manière suivante :

$$\Omega_1^c = \left[\, 0\,,\, \frac{\mathcal{B}(n)}{n} \right] \times [0,1]$$

$$\Omega_2^c = \left[\, 1 - \frac{\mathcal{A}(n)}{n},\, 1 \right] \times [0,1]$$

$$\Omega_3^c = \left[\frac{\mathcal{B}(n)}{n},\, \frac{\mathcal{A}(n)}{n} \right] \times \left[0, 1 - \frac{\mathcal{A}(n)}{n} \right] \qquad \text{(III.51)}$$

$$\Omega_4^c = \left[\frac{\mathcal{B}(n)}{n},\, \frac{\mathcal{A}(n)}{n} \right] \times \left[1 - \frac{\mathcal{B}(n)}{n},\, 1 \right]$$

Les Ω_i^c sont des rectangles ; si de plus nous remarquons que :

$$u - v \leqq (1 - u)\, v \qquad \text{(III.52)}$$

Nous pouvons en portant cette inégalité dans (III.48) majorer la valeur de l'intégrale. Cette majoration se décompose pour chaque Ω_i^c en un produit d'intégrale :

$$\left(\frac{n}{n-\beta}\right)\left(\frac{n-1}{n-\beta-1}\right) \cdots \left(\frac{n-\alpha+1}{n-\beta-\alpha+1}\right) \int_{\text{Proj}\,\Omega_i^c/0u} \frac{(n-\beta)!}{(\alpha-1)!\,(n-\beta-\alpha)!}\, u^{\alpha-1}\,(1-u)^{n-\beta-\alpha}\,du$$

$$\times \int_{\text{Proj}\,\Omega_i^c/0v} \frac{(n-\alpha)!}{(n-\beta-\alpha)!\,(\beta-1)!}\, v^{n-\beta-\alpha}\,(1-v)^{\beta-1}\,dv \qquad \text{(III.53)}$$

Comme α et β sont finis, le produit :

$$\left(\frac{n}{n-\beta}\right) \ldots \left(\frac{n-\alpha+1}{n-\beta-\alpha+1}\right) \longrightarrow 1$$

Quant à chacune des intégrales, on voit qu'on peut suivant i la majorer par 1 si la projection de Ω_i^c sur Ou ou Ov est identique à la projection de Ω sur le même axe, soit lui garder sa valeur dans le cas contraire. Nous aboutissons finalement à la majoration suivante :

$$2 - \frac{(n-\alpha)!}{(n-\alpha-\beta)!\ (\beta-1)!}\int_{1-\frac{\mathcal{A}(n)}{n}}^{1-\frac{\mathcal{B}(n)}{n}} v^{n-\beta-\alpha}\,(1-v)^{\beta-1}\,dv - \frac{(n-\beta)!}{(n-\beta-\alpha)!\ (\alpha-1)!}\int_{\frac{\mathcal{B}(n)}{n}}^{\frac{\mathcal{A}(n)}{n}} u^{\alpha-1}\,(1-u)^{n-\beta-\alpha}\,du \quad \text{(III.54)}$$

Quand $n \longrightarrow \infty$, notons que si $\frac{\mathcal{A}(n)}{\sqrt{n}}$ converge vers 0 :

$$\left(1 - \frac{\mathcal{A}(n)}{n}\right)^n \sim e^{-\mathcal{A}(n)} \quad \text{(III.55)}$$

En appliquant (III.25) à chacune des intégrales de (III.50) et en tenant compte de (III.51), on voit que (III.50) est équivalent, quand $n \longrightarrow \infty$, à :

$$2 - e^{-\mathcal{B}(n)}\left[1 + \ldots + \frac{[\mathcal{B}(n)]^{\beta-1}}{(\beta-1)!} + 1 + \ldots + \frac{[\mathcal{B}(n)]^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}\right] + e^{-\mathcal{A}(n)}\left[1 + \ldots + \frac{[\mathcal{A}(n)]^{\beta-1}}{(\beta-1)!} + 1 + \ldots + \frac{[\mathcal{A}(n)]^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}\right] \quad \text{(III.56)}$$

à condition que $\mathcal{A}(n)/\sqrt{n} \longrightarrow 0$.

Comme $\mathcal{B}(n) \longrightarrow 0$ et $\mathcal{A}(n) \longrightarrow \infty$, la série de terme général (III.52) sera de même nature que la série de terme général :

$$\mathcal{B}(n) + e^{-\mathcal{A}(n)} \quad \text{(III.57)}$$

Nous allons maintenant supposer qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{4+\eta}\,dF(x) < \infty \quad \text{(III.58)}$$

Dans ce cas la variance existe et $B_n \sim C^{te}\sqrt{n}$.

(III.58) permet d'affirmer que,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x|>c_n} |x|^{4+\eta}\,dF(x) = 0 \quad \text{(III.59)}$$

donc a fortiori :

$$\lim_{n\to\infty} (C_n)^{4+\eta}\,(1 - F(C_n) + F(-C_n)) = 0 \quad \text{(III.60)}$$

Prenons $C_n = n^{\frac{1}{2}-\xi}$ où $\xi > 0$ sera choisi en fonction de η. Soit $\rho > 0$, qu'on se donne quelconque ; pour n assez grand, on a, en portant dans (III.60) la valeur choisie de C_n :

$$n^{\left(\frac{1}{2}-\xi\right)(4+\eta)}\,(1 - F(C_n) + F(-C_n)) < \rho \quad \text{(III.61)}$$

donc :

$$\frac{n(1 - F(C_n) + F(-C_n))}{\mathcal{B}(n)} < \frac{\rho}{n^{1-\xi(4+\eta)+\eta/2} \times \mathcal{B}(n)} \quad \text{(III.62)}$$

Choisissons $0 < \xi < \frac{\eta}{2(4+\eta)}$, ce qui est possible ($\eta > 0$). Il existe donc $\zeta > 0$ tel que :

$$\frac{n(1 - F(C_n) + F(- C_n))}{\mathcal{B}(n)} < \frac{\rho}{n^{1+\zeta} \times \mathcal{B}(n)} < \frac{\rho}{n^{\zeta/2}} \qquad \text{(III. 63)}$$

$\left(\text{Si on prend } \mathcal{B}(n) = \frac{1}{n^{1+\zeta/2}} \right)$. Dans ce cas, on voit que la condition (III. 44) est satisfaite.

Comme $C_n/B_n = C^{te}\, n^{-\xi}$, il suffit de prendre $\mathcal{A}(n) = n^{\xi/2}$ pour que la condition (III. 45) soit satisfaite ; on aura aussi soin de prendre $\xi < \frac{1}{2}$, pour que $\mathcal{A}(n)/\sqrt{n}$ converge vers 0. $\mathcal{A}(n)$ et $\mathcal{B}(n)$ étant ainsi choisis, il suffit, pour montrer l'indépendance limite presque complète de démontrer que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^{1+\zeta/2}} + e^{-n^{\xi/2}} \right] < \infty \qquad \text{(III. 64)}$$

Cette série est bien convergente. Nous pouvons ainsi énoncer le théorème suivant :

THEOREME III.2 - Si la distribution initiale admet un moment fini d'ordre supérieur à 4, la moyenne est asymptotiquement strictement indépendante presque complètement des valeurs extrêmes X_{α}^{*} et $X_{n-\beta+1}^{*}$.

CHAPITRE IV

LIAISON LIMITE ENTRE LA MOYENNE ET UN QUANTILE

IV.1 - LOI-LIMITE JOINTE DU QUANTILE ET DE LA MOYENNE QUAND LA VARIANCE DE LA DISTRIBUTION INITIALE EST BORNEE

IV.1.1 - Généralités et hypothèses

Nous nous proposons de trouver la loi-limite jointe d'un quantile et de la moyenne et d'essayer d'évaluer la limite entre ces deux statistiques ; nous résoudrons ainsi un problème posé par BASTENAIRE [2]. Cet objectif implique que la moyenne ait une variance finie, donc qu'il en soit de même de la distribution initiale ; nous ferons aussi quelques hypothèses de régularité qui impliquent l'existence d'une loi-limite (normale) pour le quantile.

Nous nous intéressons au quantile d'ordre k :

$$X_r^* \quad \text{avec} \quad \frac{r}{n} \leq k < \frac{r+1}{n} \quad \text{et} \quad 0 < k < 1$$

Soit η_k la racine de l'équation :

$$F(x) = k \tag{IV.1}$$

Nous supposerons que dans un voisinage de η_k, $F(x)$ est strictement croissante, continue, et est deux fois continuement dérivable $(F'(x) = f(x))$. L'hypothèse de croissance stricte est d'ailleurs équivalente dans ce cas à $f(\eta_k) \neq 0$. Dans ce cas on sait que :

$$\lim_{n \to \infty} \text{Prob} \left[\frac{X_r - \eta_k}{\frac{1}{f(\eta_k)} \sqrt{\frac{k(1-k)}{n}}} < \eta \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\eta} e^{-\theta^2/2} \, d\theta \tag{IV.2}$$

Ce résultat est démontré par exemple dans CRAMER [4](1).

L'existence d'une variance montre que la moyenne est aussi asymptotiquement normale. Nous supposerons d'ailleurs, pour alléger l'écriture que :

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, dF(x) = 0 \tag{IV.3}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, dF(x) = 1 \tag{IV.4}$$

IV.1.2 - Recherche de la loi-limite

Désignons par $\Phi_n(s, x_r)$ la fonction de répartition jointe de S_n et de X_r^*, par $\Phi_n(s \; ; x_r)$ la fonction de répartition de S_n liée par $X_r = x_r$, et par $\Phi_n(x_r)$ la fonction de répartition marginale de X_r^*.

---

(1) P. 367 et suivantes.

On sait, d'après le théorème II.1 que les v.a. $X_1^* \ldots X_{r-1}^*$ sont conditionnellement à $X_r^* = x_r$, indépendantes dans leur ensemble des v.a. $X_{r+1}^*, \ldots, X_n^*$. En appliquant à chaque groupe les résultats du théorème II.1 de façon analogue à (III.3), on a en désignant par $\varphi_n(t \; ; \; x_r)$ la fonction caractéristique correspondant à $\Phi_n(s \; ; \; x_r)$:

$$\varphi_n(t \; ; \; x_r) = e^{itx_r} \left(\int_{-\infty}^{x_r} e^{itx} \frac{dF(x)}{F(x_r)} \right)^{r-1} \left(\int_{x_r}^{+\infty} e^{itx} \frac{dF(x)}{1 - F(x_r)} \right)^{n-r} \tag{IV.5}$$

Nous allons chercher la loi limite de :

$$\Phi_n(\alpha_n(x_r)\, s + \beta_n(x_r) \; ; \; x_r) \tag{IV.6}$$

où nous désignons par $\alpha_n(x_r) > 0$ et $\beta_n(x_r)$ deux suites de fonctions de x_r que nous choisirons plus loin.

La fonction caractéristique correspondant à (IV.6) s'écrit :

$$\varphi_n\left(\frac{t}{\alpha_n} \; ; \; x_r\right) e^{-i\frac{\beta_n}{\alpha_n}t} = e^{\frac{itx_r}{\alpha_n}} e^{-\frac{it\beta_n}{\alpha_n}} \left(\int_{-\infty}^{x_r} e^{itx/\alpha_n} \frac{dF(x)}{F(x_r)} \right)^{r-1} \left(\int_{x_r}^{+\infty} e^{it\frac{x}{\alpha_n}} \frac{dF(x)}{1 - F(x_r)} \right)^{n-r} \tag{IV.7}$$

Soit alors $A > 0$, donné aussi grand qu'on veut, mais tel que :

$$F(-A) > 0 \qquad \text{et} \qquad F(A) < 1 \tag{IV.8}$$

ce qui est toujours possible puisque F(x) ne peut être unitaire. Nous supposerons que $|x_r| < A$, et que $|t| < T$, où T est donné positif. On déduit de (IV.7) :

$$\log\left(\varphi e^{-i\frac{\beta_n}{\alpha_n}t}\right) = \frac{it\,x_r}{\alpha_n} - it\frac{\beta_n}{\alpha_n} + (r-1)\log\int_{-\infty}^{x_r} e^{it\frac{x}{\alpha_n}} \frac{dF(x)}{F(x_r)} + (n-r)\log\int_{x_r}^{+\infty} e^{it\frac{x}{\alpha_n}} \frac{dF(x)}{1 - F(x_r)} =$$

$$= \frac{it\,x_r}{\alpha_n} - it\frac{\beta_n}{\alpha_n} + (r-1)\log\left\{1 + \frac{it}{\alpha_n}\int_{-\infty}^{x_r} \frac{x dF(x)}{F(x_r)} - \frac{t^2}{2\alpha_n^2}\int_{-\infty}^{x_r} x^2 \frac{dF}{F(x_r)} + 0\left(\frac{t^2}{\alpha_n^2}\right)\right\}$$

$$+ (n-r)\log\left\{1 + \frac{it}{\alpha_n}\int_{x_r}^{+\infty} \frac{x dF}{1 - F(x_r)} - \frac{t^2}{2\alpha_n^2}\int_{x_r}^{\infty} x^2 \frac{dF}{1 - F(x_r)} + 0\left(\frac{t^2}{\alpha_n^2}\right)\right\} \tag{IV.9}$$

Dans les conditions indiquées, $|x_r| < A$, $|t| < T$, si $\alpha_n \longrightarrow \infty$, comme $\frac{r}{n} \longrightarrow k$ $(0 < k < 1)$, on voit que (IV.9) est équivalente à :

$$-it\frac{\beta_n}{\alpha_n} + \frac{nit}{\alpha_n}\left\{k\int_{-\infty}^{x_r} x\frac{dF}{F(x_r)} + (1-k)\int_{x_r}^{+\infty}\frac{xdF}{1-F(x_r)}\right\} - \frac{t^2}{2\alpha_n^2}\, n\left\{k\left[\int_{-\infty}^{x_r} x^2\frac{dF}{F(x_r)} - \left(\int_{-\infty}^{x_r}\frac{xdF}{F(x_r)}\right)^2\right] + \right.$$

$$\left. + (1-k)\left[\int_{x_r}^{+\infty}\frac{x^2dF}{1-F(x_r)} - \left(\int_{x_r}^{+\infty}\frac{xdF}{1-F(x_r)}\right)^2\right]\right\} \tag{IV.10}$$

Choisissons maintenant $\alpha_n(x_r)$ et $\beta_n(x_r)$ au moyen des formules suivantes :

$$\alpha_n^2(x_r) = n\left\{k\left[\int_{-\infty}^{x_r} x^2\frac{dF(x)}{F(x_r)} - \left(\int_{-\infty}^{x_r} x\frac{dF(x)}{F(x_r)}\right)^2\right] + (1-k)\left[\int_{x_r}^{+\infty} x^2\frac{dF(x)}{1-F(x_r)} - \left(\int_{x_r}^{+\infty} x\frac{dF(x)}{1-F(x_r)}\right)^2\right]\right\} \tag{IV.11}$$

$$\beta_n(x_r) = n\left[k\int_{-\infty}^{x_r} x\frac{dF(x)}{F(x_r)} + (1-k)\int_{x_r}^{+\infty}\frac{xdF}{1-F(x_r)}\right] \tag{IV.12}$$

(IV.10) a alors pour limite $-t^2/2$, uniformément pour $|t| \leqq T$, $|x_r| \leqq A$. La loi normale étant continue, on a donc uniformément en s et en $|x_r| \leqq A$:

$$\Phi_n(\alpha_n\, s + \beta_n \; ; \; x_r) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{s} e^{-\frac{\theta^2}{2}}\, d\theta \underset{u}{\longrightarrow} 0 \tag{IV.13}$$

Dans les mêmes conditions on a donc :

$$\Phi_n(s\ ;\ x_r) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{s-\beta_n(x_r)}{\alpha_n(x_r)}} e^{-\theta^2/2}\ d\theta \xrightarrow[u]{} 0 \tag{IV.14}$$

En fait, nous nous intéressons à la forme limite de :

$$\Phi_n(s\ ,\ x_r) = \int_{-\infty}^{x_r} \Phi_n(s\ ,\ u)\ d\Psi_n(u) \tag{IV.15}$$

D'autre part, nous savons (voir IV.2) que pour les lois marginales :

$$\Phi_n(\sqrt{n}\,\xi,\ +\infty) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\theta^2/2}\ d\theta \tag{IV.16}$$

$$\Phi_n\left(+\infty,\ \frac{1}{f(\eta_k)} \sqrt{\frac{k(1-k)}{n}}\ \eta + \eta_k\right) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\eta} e^{-\theta^2/2}\ d\theta \tag{IV.17}$$

Nous aurons donc à étudier :

$$\lim_{n \to \infty} \Phi_n\left(\sqrt{n}\,\xi\ ,\ \frac{1}{f(\eta_k)} \sqrt{\frac{k(1-k)}{n}}\ \eta + \eta_k\right) \tag{IV.18}$$

Considérons, avec $|x_r| \leq A$,

$$\Phi_n^A(s,\ x_r) = \int_{-A}^{x_r} \Phi_n(s\ ;\ u)\ d\Psi_n(u) \tag{IV.19}$$

Si on applique (IV.14), on voit que, $\varepsilon > 0$ étant donné, pour n assez grand :

$$\left| \int_{-A}^{x_r} \left(\Phi_n(s\ ;\ u) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{s-\beta_n(u)}{\alpha_n(u)}} e^{-\frac{\theta^2}{2}}\, d\theta \right) d\Psi_n(u) \right| \leq \varepsilon \int_{-A}^{x_r} d\Psi_n(u) \leq \varepsilon \tag{IV.20}$$

pour tout s et pour tout x_r, avec $|x_r| \leq A$.

D'autre part dans les mêmes conditions :

$$\Phi_n(s\ ,\ x_r) - \Phi_n^A(s\ ,\ x_r) = \int_{-\infty}^{-A} \Phi_n(s\ ,\ u)\ d\Psi_n(u) \leq \Psi_n(-A) \tag{IV.21}$$

Ainsi (IV.15) diffère de :

$$\int_{-A}^{x_r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\frac{s-\beta_n(u)}{\alpha_n(u)}} e^{-\theta^2/2}\ d\theta \right) d\Psi_n(u) \tag{IV.22}$$

que d'au plus $\varepsilon + \Psi_n(-A)$.

(IV.18) nous montre donc que la limite à chercher sera celle de :

$$\int_{-A}^{\frac{1}{f(\eta_k)} \sqrt{\frac{k(1-k)}{n}}\ \eta + \eta_k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{n}\xi - \beta_n(u)}{\alpha_n(u)}} e^{-\theta^2/2}\ d\theta \right)\ d\Psi_n(u) \tag{IV.23}$$

En effet, moyennant les hypothèses faites au début de ce chapitre, on sait que X_r^* converge en probabilité vers η_k ; si on choisit $A < \eta_k$, ce qui revient à prendre $0 < F(-A) < k$ $(k < 0)$, on voit donc que :

$$\Psi_n(-A) = \text{Prob}\ [X_r^* < -A] \longrightarrow 0 \tag{IV.24}$$

quand $n \longrightarrow \infty$; comme ε peut être pris aussi petit qu'on veut, on voit que la limite de (IV.23) est la même que la limite de (IV.18).

Effectuons dans (IV.23) le changement de variable :

$$u = \frac{1}{f(\eta_k)} \sqrt{\frac{k(1-k)}{n}}\, v + \eta_k \tag{IV.25}$$

En posant :

$$b_n(v) = \beta_n(u), \qquad a_n(v) = \alpha_n(u) \tag{IV.26}$$

il vient :

$$\int_{\frac{(-\eta_k - A) f(\eta_k)\sqrt{n}}{\sqrt{k(1-k)}}}^{\eta} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{n}\xi - b_n(v)}{a_n(v)}} e^{-\theta^2/2}\, d\theta \right] \left[\Psi_n \left(\frac{1}{f(\eta_k)} \sqrt{\frac{k(1-k)}{n}}\, v + \eta_k \right) \right] \tag{IV.27}$$

$\Psi_n(u)$ est dérivable pour $|v| \leqq V$ où $V > 0$ est donné aussi grand qu'on veut ; en effet Ψ_n est dérivable en même temps que $F(x)$, qui est dérivable dans un voisinage de η_k, où u se trouve pour n assez grand. Donc :

$$d\left[\Psi_n \left(\frac{1}{f(\eta_k)} \sqrt{\frac{k(1-k)}{n}}\, v + \eta_k \right) \right] = \Psi_n' \left(\frac{1}{f(\eta_k)} \sqrt{\frac{k(1-k)}{n}}\, v + \eta_k \right) \frac{1}{f(\eta_k)} \sqrt{\frac{k(1-k)}{n}}\, dv \tag{IV.28}$$

qui d'après (IV.17) admet pour $|v| \leqq V$ comme limite $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2}\, dv$.

Comme l'intégrande de (IV.27) est bornée par (IV.28), et qu'on montre dans la démonstration de (IV.2) que (IV.28) est borné par une fonction Y(v) absolument intégrale, on voit que (IV.27) admet pour limite :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\eta} \lim(v, \xi)\, e^{-v^2/2}\, dv \tag{IV.29}$$

où

$$\lim(v, \xi) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{n}\xi - b_n(v)}{a_n(v)}} e^{-\theta^2/2}\, d\theta \tag{IV.30}$$

Faisons dans (IV.30) le changement de variable :

$$\theta = \frac{\sqrt{n}\, t - b_n(v)}{a_n(v)} \tag{IV.31}$$

donc :

$$\lim(v, \xi) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{n}\, t - b_n(v)}{a_n(v)} \right)^2 \right] \frac{\sqrt{n}}{a_n(v)}\, dt \tag{IV.32}$$

Cherchons la limite de :

$$\frac{[a_n(v)]^2}{n} = \frac{1}{n}\, \alpha_n^2 \left(\frac{1}{f(\eta_k)} \sqrt{\frac{k(1-k)}{n}}\, v + \eta_k \right) \tag{IV.33}$$

On a :

$$F\left(\frac{1}{f(\eta_k)} \sqrt{\frac{k(1-k)}{n}}\, v + \eta_k \right) \longrightarrow F(\eta_k) = k \tag{IV.34}$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\frac{1}{f(\eta_k)} \sqrt{\frac{k(1-k)}{n}}\, v + \eta_k} x\, dF(x) \right)^2 \longrightarrow \left(\int_{-\infty}^{\eta_k} x\, dF(x) \right)^2 \tag{IV.35}$$

$$\left(\int_{\frac{1}{f(\eta_k)}\sqrt{\frac{k(1-k)}{n}}v+\eta_k}^{+\infty} x dF(x) \right)^2 \longrightarrow \left(\int_{\eta_k}^{+\infty} x dF(x) \right)^2 \qquad (IV.36)$$

On voit donc, d'après l'expression (IV.11), en tenant compte de ce que $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, dF(x) = 1$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n(v)^2}{n} = 1 - \frac{1}{k}\left(\int_{-\infty}^{\eta_k} x dF \right)^2 - \frac{1}{1-k}\left(\int_{\eta_k}^{+\infty} x dF \right)^2 \qquad (IV.37)$$

Remarquons que, comme $\int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x) = 0$, on a :

$$\int_{\eta_k}^{+\infty} x dF(x) = -\int_{-\infty}^{\eta_k} x dF \qquad (IV.38)$$

ces quantités étant positives car $\int_{\eta_k}^{+\infty} x dF > \int_{-\infty}^{\eta_k} x dF$.

Posons alors :

$$\rho = \frac{\int_{\eta_k}^{+\infty} x dF}{\sqrt{k(1-k)}} > 0 \qquad (IV.39)$$

Il vient :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n(v)^2}{n} = 1 - \rho^2$$

Il nous reste à étudier :

$$\lim \frac{b_n(v)}{a_n(v)} = \lim \frac{b_n(v)}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{a_n(v)} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \lim \frac{b_n(v)}{\sqrt{n}} \qquad (IV.41)$$

Or d'après (IV.12) :

$$\frac{b_n(v)}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\left[\frac{k}{F\left(\eta_k + \frac{v}{f(\eta_k)}\sqrt{\frac{k(1-k)}{n}}\right)} \int_{-\infty}^{\eta_k + \frac{1}{f(\eta_k)}\sqrt{\frac{k(1-k)}{n}}v} x dF(x) + \frac{1-k}{1-F\left(\eta_k + \frac{1}{f(\eta_k)}\sqrt{\frac{k(1-k)}{n}}\right)} \int_{\eta_k + \frac{1}{f(\eta_k)}\sqrt{\frac{k(1-k)}{n}}v}^{+\infty} x dF(x) \right] \qquad (IV.42)$$

Les hypothèses qu'on a faites sur F(x) dans le voisinage de η_k permettent d'appliquer le théorème des accroissements finis :

$$F\left(\eta_k + \frac{v}{f(\eta_k)}\sqrt{\frac{k(1-k)}{n}}\right) - F(\eta_k) = \frac{v}{f(\eta_k)}\sqrt{\frac{k(1-k)}{n}}\, F'\left(\eta_k + \frac{\theta}{f(\eta_k)}\sqrt{\frac{k(1-k)}{n}}\right) \qquad (IV.43)$$

avec $0 < \theta < v$.

Quand $n \longrightarrow \infty$:

$$F'\left(\eta_k + \frac{\theta}{f(\eta_k)}\sqrt{\frac{k(1-k)}{n}}\right) \longrightarrow F'(\eta_k) = f(\eta_k) \qquad (IV.44)$$

(IV.43) est équivalent à $v\sqrt{\frac{k(1-k)}{n}}$; par suite :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n(v)}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left[\frac{k}{k+\frac{v\sqrt{k(1-k)}}{\sqrt{n}}}\int_{-\infty}^{l_n} xdF + \frac{1-k}{1-k-\frac{v\sqrt{k(1-k)}}{\sqrt{n}}}\int_{l_n}^{+\infty} xdF\right] \qquad (IV.45)$$

où $l_n \longrightarrow \eta_k$. Ainsi, en notant que $\int_{-\infty}^{l_n} xdF + \int_{l_n}^{+\infty} xdF = 0$, il vient :

$$\lim\frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\lim v\int_{l_n}^{+\infty} xdF \times \left[\sqrt{\frac{k}{1-k}} + \sqrt{\frac{1-k}{k}}\right] = \frac{\rho v}{1-\rho^2} \qquad (IV.46)$$

Ainsi :

$$\lim(v,\ \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\xi}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{1-\rho^2}} - \rho v\right)^2\right]\frac{dt}{\sqrt{1-\rho^2}} \qquad (IV.47)$$

En portant dans (IV.29), il vient, pour limite de (IV.18) :

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{v=\eta}\int_{-\infty}^{t=\xi}\exp\left[\frac{-1}{2(1-\rho^2)}(v^2 - 2\rho vt + t^2)\right]dv\ dt \qquad (IV.48)$$

C'est une loi de Laplace-Gauss à deux dimensions dont le coefficient de corrélation est égal à

$$\int_{\eta_k}^{+\infty}\frac{xdF}{\sqrt{(1-k)k}}$$

c'est précisément la borne supérieure qu'avait assigné BASTENAIRE à ce coefficient de corrélation. Ainsi :

THEOREME IV.1 - Si la distribution initiale admet une fonction de répartition F(x) deux fois continuement dérivable dans un voisinage de η_k, avec $F(\eta_k) = k$ $(0 < k < 1)$, et si la variance est finie, le quantile d'ordre k et la moyenne ont une loi jointe asymptotiquement normale, dont le coefficient de corrélation est donné par la formule :

$$\rho = \frac{\int_{\eta_k}^{+\infty} xdF}{\sqrt{k(1-k)}}$$

si on s'est ramené à $\int_{-\infty}^{+\infty} xdF(x) = 0$ et à $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(x) = 1$.

Application à un exemple particulier :

Soit à la fonction de répartition

$$F(x) = 0 \qquad x \leq 1$$

$$F(x) = 1 - \frac{1}{x^\alpha} \quad (x > 1) \qquad \alpha > 2$$

La moyenne : $m = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$ et l'écart type : $= \frac{1}{\alpha - 1}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha - 2}}$

On a :

$$\rho = \frac{\int_{\eta_k}^{+\infty} xdF(\sigma x + m)}{\sqrt{k(1-k)}}$$

où η_k, tel que $F(\sigma x + m) = k$, vaut :

$$\eta_k = \frac{(1-k)^{-\frac{1}{\alpha}} - \alpha/(\alpha-1)}{\frac{1}{\alpha-1}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-2}}}$$

on trouve :

$$\rho = \sqrt{\frac{1-k}{k}}\sqrt{\alpha(\alpha-2)}\left[(1-k)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right]$$

Quand $k \longrightarrow 0$, $\rho \sim \sqrt{\frac{\alpha-2}{\alpha}}\sqrt{k} \longrightarrow 0$.

Quand $k \longrightarrow 1$, $\rho \sim \sqrt{\alpha(\alpha-2)}\,(1-k)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}} \longrightarrow 0$.

Le coefficient de corrélation reste donc continu (puisqu'il est nul pour $k = 0$ et $k = 1$) dans cet exemple.

Enfin si $\alpha \longrightarrow 2$, $\rho \longrightarrow 0$: nous verrons dans le paragraphe ultérieur à quelle propriété générale ceci correspond.

IV.2 - INDEPENDANCE LIMITE STRICTE EN PROBABILITE DE LA MOYENNE PAR RAPPORT AU QUANTILE QUAND LA VARIANCE EST INFINIE

Nous supposerons dans ce paragraphe que la moyenne a une loi-limite, qui d'ailleurs ne peut être que la loi normale ou la loi de Paul Lévy d'ordre $\alpha (0 < \alpha < 2)$.

Soit $\varepsilon > 0$, aussi petit qu'on veut. Il nous faut montrer que, pour un ensemble de valeurs de x_r de probabilité $1 - \varepsilon$ on a :

$$\delta_n(x_r) = \sup_s |\Phi_n(s\ ;\ x_r) - \Phi_n(s)| \longrightarrow 0 \qquad \text{(IV.49)}$$

c'est-à-dire, uniformément en s :

$$\Phi_n(s\ ;\ x_r) - \Phi_n(s) \longrightarrow 0 \qquad \text{(IV.50)}$$

Si $\alpha_n > 0$ et β_n désignent une suite de constantes telles que :

$$\Phi_n(\alpha_n s + \beta_n) \xrightarrow[u]{} L(S) \qquad \text{(IV.51)}$$

L(S), qui est la loi de Gauss ou celle de Paul Lévy est continue ; l'uniformité de la convergence est assurée ; comme d'autre part (IV.60) est équivalent à :

$$\Phi_n(\alpha_n s + \beta_n\ ;\ x_r) - \Phi_n(\alpha_n s + \beta_n) \xrightarrow[u]{} 0 \qquad \text{(IV.52)}$$

On voit qu'il est équivalent de montrer que :

$$\Phi_n(\alpha_n s + \beta_n\ ;\ x_r) \xrightarrow[u]{} L(S) \qquad \text{(IV.53)}$$

Soit en passant aux fonctions caractéristiques correspondantes :

$$\varphi_s\left(\frac{t}{\alpha_n}\ ;\ x_r\right) e^{-i\frac{\beta_n}{\alpha_n}t} \longrightarrow l(t) \qquad \text{(IV.54)}$$

uniformément pour $|t| \leq T$, et ceci en sachant que :

$$\varphi_s\left(\frac{t}{\alpha_n}\right) e^{-i\frac{\beta_n}{\alpha_n}t} \longrightarrow l(t) \qquad \text{(IV.55)}$$

D'après ce qu'on a vu au paragraphe précédent, on a :

$$\log\left(\varphi_s\left(\frac{t}{\alpha_n}\,;\,x_r\right)e^{-it\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\right) = it\frac{x_r}{\alpha_n} - it\frac{\beta_n}{\alpha_n} + (r-1)\log\int_{-\infty}^{x_r} e^{it\frac{x}{\alpha_n}}\frac{dF(x)}{F(x_r)} + (n-r)\log\int_{x_r}^{+\infty} e^{it\frac{x}{\alpha_n}}\frac{dF(x)}{1-F(x_r)} \tag{IV.56}$$

Alors que :

$$\log\left(\varphi_s\left(\frac{t}{\alpha_n}\right)e^{-it\frac{\alpha_n}{\beta_n}}\right) = -it\frac{\beta_n}{\alpha_n} + n\log\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\frac{x}{\alpha_n}}\,dF(x) \tag{IV.57}$$

Mais nous allons supposer provisoirement que :

$$\sqrt{n}\int_{x_r}^{+\infty}\left(e^{it\frac{x}{\alpha_n}} - 1\right)dF(x) \longrightarrow 0 \tag{IV.58}$$

$$\sqrt{n}\int_{-\infty}^{x_r}\left(e^{it\frac{x}{\alpha_n}} - 1\right)dF(x) \longrightarrow 0 \tag{IV.59}$$

uniformément dans $|t| < T$.

Nous vérifierons que (IV.58) et (IV.59) sont effectivement réalisées. Considérons (IV.56) et (IV.57) ; avec les conditions précédentes on peut arrêter au premier ordre le développement des logarithmes ; ainsi (IV.56) et (IV.57) ont respectivement la même limite que :

$$-it\frac{\beta_n}{\alpha_n} + \frac{r-1}{F(x_r)}\int_{-\infty}^{x_r}(e^{it\,x/\alpha_n} - 1)\,dF(x) + \frac{n-r}{1-F(x_r)}\int_{x_r}^{+\infty}(e^{it\,x/\alpha_n} - 1)\,dF(x) \tag{IV.60}$$

et :

$$-it\frac{\beta_n}{\alpha_n} + n\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{it\,x/\alpha_n} - 1)\,dF(x) \tag{IV.61}$$

La limite de (IV.61) est $\log l(t)$. Il faut montrer que (IV.60) admet la même limite, donc que la différence entre (IV.60) et (IV.61), à savoir :

$$n\left(\frac{r-1}{n}\,\frac{1}{F(x_r)} - 1\right)\int_{-\infty}^{x_r}\left(e^{it\frac{x}{\alpha_n}} - 1\right)dF(x) + n\left(\frac{n-r}{n}\,\frac{1}{1-F(x_r)} - 1\right)\int_{x_r}^{+\infty}\left(e^{it\frac{x}{\alpha_n}} - 1\right)dF(x) \tag{IV.62}$$

tend vers zéro.

D'autre part, on sait (loi limite d'un quantile) que pour n et A assez grands (A fixe) :

$$\text{Prob}\left[k - \frac{A}{\sqrt{n}} < F(x_r) < k + \frac{A}{\sqrt{n}}\right] > 1 - \varepsilon \tag{IV.63}$$

Plaçons-nous dans ce domaine $\left(k - \frac{A}{\sqrt{n}} < F(x_r) < k + \frac{A}{\sqrt{n}}\right)$; nous voyons que (IV.62) est majorée par :

$$\frac{n}{k - \frac{A}{\sqrt{n}}}\left[\left|\frac{r-1}{n} - k\right| + \frac{A}{\sqrt{n}}\right]\int_{-\infty}^{x_r}\left(e^{it\frac{x}{\alpha_n}} - 1\right)dF(x) + \frac{n}{1-\left(k + \frac{A}{\sqrt{n}}\right)}\left[\left|\frac{n-r}{n} - (1-k)\right| + \frac{A}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\int_{x_r}^{+\infty}\left(e^{it\frac{x}{\alpha_n}} - 1\right)dF(x) \tag{IV.64}$$

par définition du quantile $\left|\frac{r-1}{n} - k\right| \leq \frac{2}{n}$; nous avons donc la majoration suivante, pour n assez grand :

$$\sqrt{n}\,\frac{A}{k}\left|\int_{-\infty}^{x_r}\left(e^{it\frac{x}{\alpha_n}} - 1\right)dF(x)\right| + \sqrt{n}\,\frac{A}{1-k}\left|\int_{x_r}^{+\infty}\left(e^{it\frac{x}{\alpha_n}} - 1\right)dF(x)\right| \tag{IV.65}$$

Quand $n \longrightarrow \infty$, (IV.65) converge vers 0, d'après (IV.58) et (IV.59). Afin d'achever la démonstration, il ne nous reste plus qu'à montrer que les hypothèses faites sur F(x) entraînent (IV.58) et (IV.59).

- Démonstration de (IV.58) et (IV.59) :

Premier cas : la loi limite de la moyenne est normale

Nous avons déjà vu (en III.1.2) qu'on pouvait prendre :

$$\alpha_n^2 = n \left(\int_{-C_n}^{+C_n} x^2 \, dF(x) - \left(\int_{-C_n}^{+C_n} x \, dF(x) \right)^2 \right) \tag{IV.66}$$

Puisque la variance est infinie :

$$\int_{-C_n}^{+C_n} x^2 \, dF(x) \longrightarrow \infty \tag{IV.67}$$

donc :

$$\frac{\sqrt{n}}{\alpha_n} \longrightarrow 0 \tag{IV.68}$$

et ainsi, L et L' étant des réels :

$$\sqrt{n} \left| \int_L^{L'} (e^{it\,x/\alpha_n} - 1) \, dF(x) \right| \leq \frac{\sqrt{n}}{\alpha_n} \left| \int_L^{L'} |x| \, dF(x) \right| = C^{te} \, \frac{\sqrt{n}}{\alpha_n} \longrightarrow 0 \tag{IV.69}$$

La proposition est démontrée.

Deuxième cas : la loi limite de la moyenne est la loi de Paul Lévy

On a alors les propriétés suivantes, qui sont exposées dans GNEDENKO-KOLMOGOROV [9](1).

$$nF(\alpha_n x) \longrightarrow \frac{C_1}{|x|^\alpha} \quad , \quad x < 0 \, , \quad 0 < \alpha < 2 \tag{IV.70}$$

$$n(1 - F(\alpha_n x)) \longrightarrow \frac{C_2}{x^\alpha} \quad , \quad x > 0 \, , \quad 0 < \alpha < 2 \tag{IV.70 bis}$$

C_1 et C_2 étant des constantes positives ou nulles.

$$\lim_{\lambda \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \, n \left\{ \int_{|x|<\lambda} x^2 \, dF(\alpha_n x) - \left(\int_{|x|<\lambda} x \, dF(\alpha_n x) \right)^2 \right\} = 0 \tag{IV.71}$$

Nous allons en plus avoir besoin du lemme suivant :

LEMME :

Si $\int_{X_0}^{X} x^2 \, dF(x)$ tend vers l'infini avec X, X_0 restant fixe, alors

$$\left(\int_{X_0}^{X} x \, dF(x) \right)^2 = 0 \left(\int_{X_0}^{X} x^2 \, dF(x) \right) \tag{IV.72}$$

La conclusion reste la même si on remplace X_0 par $-X$.

Démonstration : Soit Z(x) une fonction positive, non bornée quand $x \longrightarrow \pm \infty$, et telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Z^2(x) \, dF(x) = C < \infty \tag{IV.73}$$

---

(1) P. 124 et 176.

Alors, d'après l'inégalité de Schwarz

$$\left(\int_{X_o}^{X} x\, dF(x)\right)^2 = \left(\int_{X_o}^{X} \frac{x}{Z(x)} \cdot Z(x)\, dF(x)\right)^2 \leqq \int_{X_o}^{X} Z^2(x)\, dF(x) \int_{X_o}^{X} \frac{x^2\, dF(x)}{Z^2(x)} \qquad (IV.74)$$

Donc :

$$\frac{\left(\int_{X_o}^{X} x\, dF(x)\right)^2}{\int_{X_o}^{X} x^2\, dF(x)} \leqq C\, \frac{\int_{X_o}^{X_1} \left(\frac{x}{Z(x)}\right)^2 dF(x) + \frac{1}{Z^2(A)} \int_{X_1}^{X} x^2\, dF(x)}{\int_{X_o}^{X} x^2\, dF(x)}$$

où $X_1 > X_o$ est une constante telle que pour $A > X_1$ (ce qui est le cas dans (IV.75) d'après le théorème de la moyenne) on ait :

$$\frac{1}{Z^2(A)} < \eta\,, \quad \eta > 0,$$

étant donné aussi petit qu'on veut.

On peut ainsi donner la majoration :

$$\frac{\left(\int_{X_o}^{X} x\, dF\right)^2}{\int_{X_o}^{X} x^2\, dF} \leqq \frac{C \int_{X_o}^{X_1} \left(\frac{x}{Z}\right)^2 dF(x)}{\int_{X_o}^{X} x^2\, dF(x)} + C\eta \qquad (IV.76)$$

Le premier terme du second membre de (IV.75) tend vers 0, car le numérateur est borné, et le dénominateur tend vers l'infini ; quant au deuxième terme, il est arbitrairement petit. La proposition est donc démontrée.

Le second résultat se montrerait de façon analogue, en faisant un découpage :

$$\int_{-X}^{+X} \left(\frac{x}{Z}\right)^2 dF = \int_{-X}^{-X_1} \left(\frac{x}{Z}\right)^2 dF + \int_{X_1}^{+X_1} \left(\frac{x}{Z}\right)^2 dF + \int_{X_1}^{X} \left(\frac{x}{Z}\right)^2 dF \qquad (IV.77)$$

avec X_1 assez grand.

Ceci montré, nous voyons que (IV.71) entraîne que, quand $n \longrightarrow \infty$, il existe $B > 0$, tel que :

$$\frac{n}{\alpha_n^2} \left\{ \int_{|x| < \lambda\alpha_n} x^2\, dF(x) - \left(\int_{|x| < \lambda\alpha_n} x\, dF(x) \right)^2 \right\} < B \qquad (IV.78)$$

λ étant fixe. Il en résulte, a fortiori, que :

$$\frac{n}{\alpha_n^2} \int_{|x| < \lambda\alpha_n} x^2\, dF(x) < B \qquad (IV.79)$$

Nous allons vérifier que les conditions (IV.58) et (IV.59) sont réalisées. Montrons le par exemple sur (IV.58) :

$$\sqrt{n} \left| \int_{x_r}^{+\infty} (e^{it\,x/\alpha_n} - 1)\, dF(x) \right| \leqq \frac{\sqrt{n}}{\alpha_n} |t| \int_{x_r}^{\alpha_n\lambda} x\, dF(x) + \sqrt{n} \int_{\alpha_n\lambda}^{\infty} \left| e^{it\,x/\alpha_n} - 1 \right| dF(x) \qquad (IV.80)$$

Or (IV.79) montre, en se servant du lemme précédent que :

$$\frac{n}{\alpha_n^2} \left(\int_{x_r}^{\alpha_n\lambda} x\, dF(x) \right)^2 = \frac{n}{\alpha_n^2}\, 0 \left(\int_{x_r}^{\alpha_n\lambda} x^2\, dF(x) \right) < \frac{n}{\alpha_n^2}\, 0 \left(\int_{|x| < \alpha_n\lambda} x^2\, dF(x) \right) < 0(B) \qquad (IV.81)$$

ce qui montre que le premier terme du second membre de (IV.80) converge vers 0 (uniformément dans $|t| < T$).

Quant au second terme il est majoré par :

$$2\sqrt{n}(1 - F(\alpha_n \lambda) \longrightarrow 0 \qquad \text{(IV.82)}$$

d'après (IV.70) (puisque $n(1 - F(\alpha_n \lambda)) \longrightarrow C/(\lambda)$.

On ne peut pas utiliser le lemme si $\int_{x_r}^{+\infty} x^2 \, dF(x) < \infty$; mais dans ce cas (IV.79) montre que $\frac{n}{\alpha_n^2} \longrightarrow 0$. Comme a fortiori $\int_{x_r}^{+\infty} x \, dF(x) < \infty$, on voit que

$$\sqrt{n} \left| \int_{x_r}^{+\infty} (e^{it\,x/\alpha_n} - 1) \, dF(x) \right| < \frac{\sqrt{n}}{\alpha_n} |t| \int_{x_r}^{+\infty} x \, dF(x) \longrightarrow 0 \qquad \text{(IV.83)}$$

(IV.58) est ainsi démontrée dans tous les cas.

THEOREME IV.2 - Si dans un échantillon dont la distribution initiale a une variance infinie la moyenne a une loi-limite, elle est asymptotiquement strictement indépendante en probabilité du quantile.

CONCLUSION

On voit que le quantile se "conduit" avec la moyenne de façon opposée aux valeurs extrêmes : si la variance est finie il y a liaison limite entre moyenne et quantile, indépendance limite entre valeurs extrêmes et moyennes ; on verra au chapitre suivant que dans le cas des lois de Paul Lévy il y a liaison limite entre au moins une des valeurs extrêmes et la moyenne, alors qu'il y a indépendance limite entre quantile et moyenne, le cas transitoire où ces trois statistiques sont indépendantes à la limite étant celui de la convergence de la moyenne vers la loi normale, associée à une variance infinie.

CHAPITRE V

LES DIFFÉRENTES FORMES LIMITES DE LA LOI JOINTE DES VALEURS EXTRÊMES ET DE LA MOYENNE ET L'INFLUENCE DES LOIS LIMITES MARGINALES DES EXTRÊMES SUR LA LOI LIMITE DE LA MOYENNE

V.1 - HYPOTHESES DE DEPART

V.1.1 - Généralités

L'existence d'une forme limite pour la loi jointe du triplet Y_n, Z_n, S_n/n, où les v.a. désignent respectivement la plus grande valeur, la plus petite valeur, et la moyenne de l'échantillon associée à la fonction de répartition F(x), suppose l'existence de lois limites pour chacune de ces statistiques. De ce fait nous allons voir que dans presque tous les cas il suffit de partir des lois-limites des valeurs extrêmes pour en déduire la loi-limite de la moyenne, en se donnant les suites de constantes conduisant vers la loi limite de la moyenne (voir I.1.1) en fonction de celles qui conduisent vers les lois-limites des extrêmes ; nous en déduisons la loi limite du triplet Y_n, Z_n, S_n/n. Nous reprenons notre étude faite en [19]. Cette étude a été effectuée dans certains cas par AROV et BOBROV (voir [1]), tandis que nous nous sommes évertués à épuiser l'ensemble des cas possibles. De toute façon un comportement semblable vis-à-vis de la convergence vers une loi-limite de la moyenne et des extrêmes est suggérée dans plusieurs cas par la ressemblance de certaines conditions nécessaires et suffisantes figurant dans GNEDENKO [8] pour les extrêmes et dans GNEDENKO-KOLMOGOROV [9] pour les moyennes. On pourra aussi voir quelques études sur les liaisons entre les comportements de ces statistiques dans DUGUE [6] et DARLING [5]. En ce qui concerne les cas d'indépendance limite nous retrouverons deux cas particuliers du théorème III.1.

V.1.2 - Les lois-limites des valeurs extrêmes

Nous allons dans la suite supposer l'existence de lois-limites pour les valeurs extrêmes, c'est-à-dire de limites propres pour $F^n(a_n x + b_n)$ et pour $[1 - F(\alpha_n x + \beta_n)]^n$. Nous donnons ici les différentes formes limites des plus grandes valeurs (voir GEFFROY [7], GNEDENKO [8], GUMBEL [10] etc.) ainsi que les suites a_n et b_n associées. Nous donnons aussi les conditions nécessaires et suffisantes de convergence vers ces lois, portant sur F(x).

Les lois lois-limites des plus grandes valeurs, si elles existent, ne peuvent être que du même type que :

soit :

$$(a)\quad \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0 \quad \text{avec} \quad \alpha > 0 \end{cases} \tag{V.1}$$

$$(b)\quad \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^{\alpha}) & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \tag{V.2}$$

$$(c)\quad \Lambda(x) = \exp[-e^{-x}] \tag{V.3}$$

On pourra encore dire (du point de vue des plus grandes valeurs) que F(x) est du domaine d'attraction de la loi L(x) (avec L = Λ, Φ ou Ψ) en notant :

$$F(x) \in D.A.\ L(x)$$

Conditions nécessaires et suffisantes de GNEDENKO

Nous allons les noter sous formes d'équivalences. Nous renvoyons à V.2 pour la définition de $F^{-1}(x)$.

(a) $$F(x) \in D.A.\ \Phi_\alpha(x) \Longleftrightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{1 - F(x)}{1 - F(kx)} = k^\alpha \quad \forall k > 0 \tag{V.4}$$

on pourra alors choisir :

$$a_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right), \quad b_n = 0 \tag{V.5}$$

On a alors, uniformément pour $y > \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} n(1 - F(a_n y)) = y^{-\alpha} \tag{V.6}$$

(b) $$F(x) \in D.A.\ \Psi_\alpha(x) \Longleftrightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{1 - F(kx + x_0)}{1 - F(x + x_0)} = k^\alpha \quad \forall k > 0 \tag{V.7}$$

où x_0 existe et est tel que $F(x_0) = 1$, $F(x_0 - \varepsilon) < 1 \ \forall \varepsilon > 0$.

On peut alors prendre,

$$a_n = x_0 - F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right), \quad b_n = x_0 \tag{V.8}$$

et on a :

$$\lim_{n \to \infty} n(1 - F(a_n y + b_n)) = (-y)^\alpha \tag{V.9}$$

(c) $$F(x) \in D.A.\ \Lambda(x) \Longleftrightarrow \lim_{n \to \infty} n(1 - F(a_n y + b_n)) = e^{-y} \tag{V.10}$$

en prenant :

$$b_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad a_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{ne}\right) - F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \tag{V.11}$$

Dans ce cas on a $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow 0$ et si $F(x) < 1$ pour tout x, pour que $F(x) \in D.A.\ \Lambda(x)$, il est nécessaire que :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 - F(kx)}{1 - F(x)} = 0 \qquad \forall k > 1 \tag{V.12}$$

La transposition aux cas des plus petites valeurs est immédiate. On a pour les formes limites de $[1 - F(\alpha_n x + \beta_n)]^n$ les trois types possibles :

(a) $$\Phi'_\beta(x) = \begin{cases} \exp[-(-x)^{-\alpha}] & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases} \tag{V.13}$$

(b) $$\Psi'_\beta(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ \exp[-(x)^\alpha] & x \geq 0 \end{cases} \tag{V.14}$$

(c) $$\Lambda'(x) = \exp[-e^x] \tag{V.15}$$

Dans les conditions nécessaires et suffisantes, il suffira de remplacer $1 - F(x)$ par $F(-x)$, $1 - F(a_n y + b_n)$ par $F(\alpha_n Z - \beta_n)$, $F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ par $-F^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$.

V.2 - DEMONSTRATIONS DE QUELQUES LEMMES

Nous allons donner ici un certain nombre de résultats (dont quelques uns sont, pensons-nous, originaux, du moins par leur démonstration) qui nous serviront dans la suite, et qui nous permettront de dégager l'essentiel de l'étude des démonstrations accessoires.

V.2.1 - Définition et propriétés de la fonction inverse d'une fonction de répartition

Cette définition, donnée par GEFFROY [7](1), permet de simplifier considérablement la présentation des résultats de GNEDENKO (voir V.1.2).

DEFINITION - Etant donné un réel y appartenant à]0,1[, on définit $x = F^{-1}(y)$ par la borne supérieure des réels ξ tels que $F(\xi) < y$.

Si F(x) est continue et strictement monotone, on retrouve la notion classique de fonction réciproque.

$F^{-1}(y)$ peut encore être caractérisée par la propriété suivante :

$$\forall h > 0, \quad F(x - h) < y, \quad F(x + h) \geqq y \tag{V.16}$$

Autres propriétés de $F^{-1}(y)$

a) $F^{-1}(y)$ est monotone non décroissante,

b) $F^{-1}(y)$ est continue à gauche : $F^{-1}(y - o) = F^{-1}(y)$.

Les démonstrations de ces propriétés se trouvent dans GEFFROY [7].

LEMME 1 -

- Si $F(x) < 1$ pour tout x, on a $\lim_{x \to +\infty} \frac{F^{-1}(F(x))}{x} = 1$;
- Si $F(x) > 0$ pour tout x, on a $\lim_{x \to -\infty} \frac{F^{-1}(F(x))}{x} = 1$.

En effet, pour tout $h > 0$, d'après (V.16) on a $F(x - h) < y$. Comme $F(x - h) < 1$, $F^{-1}(F(x - h))$ peut être définie, et du fait de la non décroissance de F^{-1}, on a :

$$F^{-1}(F(x - h)) \leqq F^{-1}(y) = x$$

On a de même :

$$F(x + h) \geqq y \quad \text{donc} \quad F^{-1}(F(x + h)) \geqq F^{-1}(y) = x$$

Si nous changeons dans ces inégalités $x - h$, puis $x + h$ en x, il vient :

$$\frac{F^{-1}[F(x)]}{x + h} \leqq 1 \leqq \frac{F^{-1}[F(x)]}{x - h} \tag{V.17}$$

soit encore

$$\frac{x - h}{x} \leqq \frac{F^{-1}F(x)}{x} \leqq \frac{x + h}{x}$$

(à condition de prendre $x - h > 0$, ce qui est toujours possible pour x assez grand).

Si h reste fixe, quand x tend vers l'infini (V.18) montre que $F^{-1}(F(x))/x \longrightarrow 1$.

La démonstration est analogue quand $x \longrightarrow -\infty$.

---

(1) P. 63.

V.2.2 - *LEMME 2*

Si $F^n(a_n y + b_n)$ et $[1 - F(\alpha_n z - \beta_n)]^n$ ont des limites propres, quand $n \longrightarrow \infty$, $1 - F(a_n y + b_n)$ et $F(\alpha_n z - \beta_n)$ convergent vers 0 et, si L(y) et L'(y) désignent respectivement chacune des lois limites, on a :

$$n \log (1 - F(a_n y + b_n)) \longrightarrow - \log L(y)$$

$$n \log F(\alpha_n z - \beta_n) \longrightarrow - \log L'(z)$$

S'il n'en était pas ainsi, on pourrait extraire une suite de n_i telle que $1 - F(a_{n_i} y + b_{n_i}) \longrightarrow \lambda$ avec $\lambda > 0$; comme $\lambda \leqq 1$ on en déduirait que :

$$F^{n_i}(a_{n_i} y + b_{n_i}) \sim (1 - \lambda)^n \longrightarrow 0 \quad \forall y$$

ce qui est contradictoire avec l'existence d'une limite propre. (On verrait de même que $F(\alpha_n z - \beta_n)$ tend vers 0). Le deuxième résultat s'en déduit immédiatement par la considération des logarithmes.

V.2.3 - Loi-limite des valeurs extrêmes et convergence des moments de la distribution initiale

Nous allons montrer ici un résultat analogue à celui signalé par GNEDENKO-KOLMOGOROV [9](1) pour la loi limite de la moyenne.

Dans la suite A désigne une constante finie quelconque.

LEMME 3

- Si $F(x) \in$ D.A. $\Phi_\alpha(x)$, alors $\int_A^{+\infty} x^{\alpha-\epsilon}\, dF(x)$ converge et $\int_A^{+\infty} x^{\alpha+\epsilon}\, dF(x)$ diverge pour tout $\epsilon > 0$.

On a, bien entendu, un résultat analogue pour les valeurs négatives de x.

DEMONSTRATION - Considérons l'intégrale $\int_A^{+\infty} x^\lambda\, dF(x)$.

Soit $\eta > 0$, donné aussi petit qu'on veut ; d'après (V.4), il existe $u_o(\eta)$ tel que pour $u > u_o(\eta)$, on ait :

$$\left| \frac{1 - F(ku)}{1 - F(u)} - k^{-\alpha} \right| < \eta \qquad (V.19)$$

soit :

$$k^{-\alpha} - \eta < \frac{1 - F(ku)}{1 - F(u)} < k^{-\alpha} + \eta \qquad (V.20)$$

Or si on choisit $k > 1$, on peut écrire :

$$u^\lambda [F(ku) - F(u)] \leqq \int_u^{ku} x^\lambda\, dF(x) \leqq (ku)^\lambda [F(ku) - F(u)] \qquad (V.21)$$

Comme (V.20) donne aussi :

$$(1 - F(u))(1 - k^{-\alpha} - \eta) \leqq F(ku) - F(u) \leqq (1 - F(u))(1 - k^{-\alpha} - \eta) \qquad (V.22)$$

on voit en portant dans (V.21) que :

$$u^\lambda (1 - F(u))(1 - k^{-\alpha} - \eta) \leqq \int_u^{ku} x^\lambda\, dF(x) \leqq (ku)^\lambda (1 - F(u))(1 - k^{-\alpha} - \eta) \qquad (V.23)$$

k étant plus grand que 1, (V.23) reste valable si on change u et ku, car $ku > u > u_o(\eta)$:

$$u^\lambda k^\lambda [1 - F(ku)](1 - k^{-\alpha} - \eta) \leqq \int_{ku}^{k^2 u} x^\lambda\, dF(x) \leqq k^{2\lambda} [1 - F(ku)]\, u^\lambda (1 - k^{-\alpha} - \eta) \qquad (V.24)$$

Si on utilise (V.20), on voit alors qu'on a les inégalités :

---

(1) P. 179

$$au^{\lambda}\,[1 - F(u)]\,k^{\lambda}(k^{-\alpha} - \eta) \leqq \int_{ku}^{k^2u} x^{\lambda}\,dF(x) \leqq bu^{\lambda}\,[1 - F(u)]\,k^{\lambda}(k^{-\alpha} + \eta) \qquad (V.25$$

où l'on a posé :

$$a = 1 - k^{-\alpha} - \eta\,,\quad b = 1 - k^{-\alpha} + \eta$$

On peut à nouveau remplacer u par uk etc., on obtient finalement :

$$au^{\lambda}\,[1 - F(u)]\,[k^{\lambda}(k^{-\alpha} - \eta)]^n \leqq \int_{k^n u}^{k^{n+1}u} x^{\lambda}\,dF(x) \leqq bu^{\lambda}\,[1 - F(u)]\,[k^{\lambda}(k^{-\alpha} + \eta)]^n \qquad (V.26)$$

L'étude de convergence de l'intégrale $\int_A^{+\infty} x\,dF(x)$ est équivalente à celle de la série de terme général $u_n = \int_{k^n u}^{k^{n+1}u} x^{\lambda}\,dF(x)$; nous allons étudier la nature de cette série au moyen de (V.26).

Supposons $\lambda < \alpha$: on peut donc poser $\lambda = \alpha - \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$. Si $\lambda \leqq 0$ le résultat est évident pour $A > 0$; supposons donc $\lambda > 0$; nous allons montrer qu'on peut choisir :

$$y = k^{\alpha-\epsilon}\,(k^{-\alpha} + \eta) < 1$$

En effet y passe par un minimum pour $k_m = \left(\frac{\varepsilon}{\eta(\alpha - \varepsilon)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ minimum qui a pour valeur :

$$y_m = \eta^{\epsilon/\alpha}\,\left(\frac{\varepsilon}{\alpha - \varepsilon}\right)^{-\frac{\epsilon}{\alpha}}\,\frac{\alpha}{\alpha - \varepsilon} - \eta^{\cdot} : A(\alpha, \varepsilon)$$

Pour η assez petit on a $y_m < 1$ et $k_m > 1$; ainsi :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [k^{\lambda}(k^{-\alpha} + \eta)]^n < \infty$$

donc $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ et $\int_A^{+\infty} x^{\lambda}\,dF(x)$ convergent.

Si maintenant $\lambda > \alpha$, on pose $\lambda = \alpha + \varepsilon$ et on considère le membre de droite de (V.26). On voit aisément qu'on peut choisir $y = k^{\alpha+\epsilon}\,(k^{-\alpha} - \eta) > 1$ avec $k > 1$. En effet pour $k = k_m = \left(\frac{\varepsilon}{\eta(\alpha+\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ on a un maximum $y_m = \eta^{-\epsilon/\alpha}\,A(\alpha, \varepsilon)$; les conditions demandées sont réalisées en choisissant η assez petit ; alors :

$$\sum_{n=1}^{\infty} [k^{\lambda}(k^{-\alpha} - \eta)]^n = \infty$$

d'où :

$$\int_A^{+\infty} x^{\lambda}\,dF(x) = \infty$$

Le résultat du lemme 3 est complété par le lemme 4 :

LEMME 4 - Si $F(x) \in$ D.A. $\Psi_{\alpha}(x)$ ou si $F(x) \in$ D.A. $\Lambda(x)$, $\int_A^{+\infty} x^{\lambda}\,dF(x) < \infty$ pour tout λ.

Si $F(x) \in$ D.A. $\Psi_{\alpha}(x)$, le résultat est évident puisque la distribution est bornée supérieurement. Il en est de même si cette distribution est bornée supérieurement avec $F(x) \in$ D.A. $\Lambda(x)$. sinon on sait par (V.12) que pour tout $k > 1$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 - F(kx)}{1 - F(x)} = 0$$

Pour montrer notre résultat il suffira d'appliquer l'inégalité de droite de (III.26), en y faisant $\alpha = +\infty$; alors :

$$u_n = \int_{k^n u}^{k^{n+1} u} x^\lambda \, dF(x) \leqq b(k^\lambda \eta)^n \tag{V.27}$$

On montrera la convergence de la série associée en choisissant $\eta < 1/k^\lambda$.

V.2.4 - Résultats divers

LEMME 5 - Les intégrales $I_1 = \int_a^{+\infty} g(x) \, dF(x)$ et $I_2 = \int_A^1 g(F^{-1}(y)) \, dy$ où $g(x)$ est une fonction continue et positive, sont de même nature.

Si $F(x)$ est continue et strictement croissante, $F^{-1}(x)$ est une fonction réciproque ordinaire et la propriété est le résultat d'un simple changement de variable. Sinon nous pouvons toujours, du fait de l'hypothèse faite sur $g(x)$, considérer I_1 comme une intégrale de Stieljes-Rieman.

1/ $I_1 < \infty \Longrightarrow I_2 < \infty$

D'après un théorème de Cauchy, si $I_1 < \infty$ pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver $B_0(\varepsilon)$ tel que, pour tout B et B' supérieurs à $B(\varepsilon)$, on ait :

$$\int_B^{B'} g(x) \, dF(x) < \varepsilon \tag{V.28}$$

Effectuons la partition $x_1 = B < x_2 < \ldots \; x_{n-1} < x_n = B'$; pour n assez grand et $\sup(x_{i+1} - x_i)$ assez faible, on a par définition :

$$\left| \int_B^{B'} g(x) \, dF(x) - \sum_{\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]} g(\xi_i) \, [F(x_{i+1}) - F(x_i)] \right| < \varepsilon \tag{V.29}$$

donc :

$$\sum_{\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]} g(\xi_i) \, [F(x_{i+1}) - F(x_i)] < 2\varepsilon \tag{V.30}$$

En prenant $\xi_i = x_{i+1}$ si i est impair et $\xi_i = x_i$ si i est pair, on voit qu'on peut écrire (V.30) sous la forme :

$$\sum_{i \in \text{impairs}} g(x_{i+1}) \, [F(x_{i+1}) - F(x_i)] + \sum_{i \in \text{impairs}} g(x_{i+1}) \, [F(x_{i+2}) - F(x_{i+1})] < 2\varepsilon \tag{V.31}$$

soit :

$$\sum_{i \in \text{impairs}} g(x_{i+1}) \, [F(x_{i+2}) - F(x_i)] < 2\varepsilon \tag{V.32}$$

De même, si on interchange pairs et impairs pour les valeurs de ξ_i, on obtient :

$$\sum_{i \in \text{pairs}} g(x_{i+1}) \, [F(x_{i+2}) - F(x_i)] < 2\varepsilon \tag{V.32 bis}$$

Les notations $i \in$ pairs et impairs signifient bien sûr que les sommations sont respectivement étendues aux indices pairs et impairs.

Posons $x = F^{-1}(y)$. Par définition de F^{-1}, on a $F(x_i) \leqq y_i$; de plus, comme $F(x)$ est non décroissante $F(x_{i+2}) \geqq y_{i+1}$ (puisque $x_{i+2} > x_{i+1}$). Les inégalités (V.32) et (V.32 bis) peuvent donc s'écrire a fortiori :

$$\sum_{i \in \text{impairs}} g(F^{-1}(y_{i+1})) \, (y_{i+1} - y_i) < 2\varepsilon \tag{V.33}$$

$$\sum_{i \in \text{pairs}} g(F^{-1}(y_{i+1})) \, (y_{i+1} - y_i) < 2\varepsilon \tag{V.33 bis}$$

donc :

$$\sum_{i=1}^{i=n} g(F^{-1}(y_{i+1}))\ (y_{i+1} - y_i) < 4\,\varepsilon \tag{V.34}$$

avec une partition suffisamment dense on en déduit donc :

$$\int_{A=F(B)}^{A'=F(B')} g(F^{-1}(y))\ dy < 5\varepsilon \tag{V.35}$$

Comme ceci est valable pour tout A et A' supérieur à $A_0 = F(B_0)$, on voit d'après le théorème de Cauchy que l'intégrale I_2 converge.

2/ $\underline{I_2 < \infty \Longrightarrow I_1 < \infty}$

La démonstration se fait en sens inverse. En effet si $I_2 < \infty$, on voit que, dans le même domaine :

$$\sum g(F^{-1}(\xi_i))\ (y_{i+1} - y_i) < 2\,\varepsilon \tag{V.36}$$

d'où :

$$\sum_{i \in \text{pairs ou impairs}} g(x_i)\ (y_{i+1} - y_i) < 2\,\varepsilon \tag{V.37}$$

Comme $y_{i-1} \leqq F(x_i)$ et $y_{i+1} \geqq F(x_{i+1})$ on aboutit à :

$$\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\ [F(x_{i+1}) - F(x_i)] < 4\,\varepsilon \tag{V.38}$$

d'où le résultat.

3/ Enfin si $I_1 = \infty$, on a nécessairement $I_2 = \infty$ sinon $I_2 < \infty$, donc $I_1 < \infty$. I_1 et I_2 sont donc bien de même nature.

LEMME 6 - $\underline{\text{Si } \int_a^{+\infty} x^\lambda\, dF(x), < \infty, \text{ on a pour n assez grand } F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \left[\frac{n}{\log n}\right]^{\frac{1}{\lambda}}}$.

En effet d'après le lemme 5,

$$\int_A^1 (F^{-1}(x))^\lambda\ dx < \infty \tag{V.39}$$

Si nous considérons l'intégrale, avec A > 0,

$$\int_A^1 \frac{-\,dx}{(1-x)\,\log(1-x)} = \infty \tag{V.40}$$

qui est divergente (faire log(1 − x) = u), voit que pour x assez proche de 1 on doit avoir majoration de l'intégrande de (V.39) par celui de (V.40), à savoir :

$$[F^{-1}(x)]^\lambda < \frac{-1}{(1-x)\,\log(1-x)} \tag{V.41}$$

En posant $x = 1 - \frac{1}{n}$, il vient donc :

$$F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \tag{V.42}$$

Comme corrolaire immédiat, on voit que si $F(x) \in$ D. A. $\Phi_\alpha(x)$, on a :

$$F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) < n^{\frac{1}{\alpha}+\epsilon} \quad (\epsilon > 0),$$

pour n assez grand.

LEMME 7 - Si $\int_a^{+\infty} x^\lambda \, dF(x) = \infty$, on a $F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) > \frac{n^{\frac{1}{\lambda}}}{(\log n)^{\frac{1}{\lambda}+\epsilon}}$ ($\epsilon > 0$) (pour n assez grand).

Le lemme 7 se montre d'une manière analogue au lemme 6 ; on utilise le lemme 5 et le fait que :

$$\int_A^1 \frac{dx}{(1-x)(\log x)^{1+\epsilon'}} < \infty \tag{V.43}$$

d'où :

$$[F^{-1}(x)]^\lambda > \frac{1}{(1-x)(\log x)^{1+\epsilon'}} \tag{V.44}$$

en posant $x = 1 - \frac{1}{n}$ on arrive au résultat.

Comme corollaire, on voit que si $F(x) \in$ D.A. $\Phi_\alpha(x)$, $F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) > n^{\frac{1}{\alpha}-\epsilon}$.

Nous nous servirons aussi du résultat suivant :

LEMME 8 - Si $F(x) \in$ D.A. $\Phi_\alpha(x)$, on a $\lim_{u \to \infty} u^\lambda(1 - F(u)) = \infty$ si $\lambda > \alpha$ et est nul si $\lambda < \alpha$.

Montrons la première proposition, la seconde se montrant de façon analogue.

En posant $x = 1 - \frac{1}{v}$ dans (V.44) on voit que :

$$F^{-1}\left(1 - \frac{1}{v}\right) > v^{\frac{1}{\alpha}-\epsilon} \tag{V.45}$$

donc, $v \longrightarrow \infty$,

$$\frac{F^{-1}\left(1 - \frac{1}{v}\right)}{v^{\frac{1}{\alpha}-2\epsilon}} > v^\epsilon \longrightarrow \infty \tag{V.46}$$

Elevons (V.46) à la puissance $\frac{\alpha}{1-2\alpha\epsilon} = \frac{\alpha}{1-\eta} = \lambda > \alpha$; il vient :

$$\frac{1}{v}\left[F^{-1}\left(1 - \frac{1}{v}\right)\right]^\lambda \longrightarrow \infty \tag{V.47}$$

En posant $\frac{1}{v} = 1 - F(u)$, et en observant que d'après le lemme 1, $F^{-1}(F(u))/u \longrightarrow 1$, il vient :

$$u^\lambda(1 - F(u)) \longrightarrow \infty \tag{V.48}$$

LEMME 9 - Si $F(x) \in$ D.A. $\Phi_\alpha(x)$ avec $\alpha > 1$, on a :

$$\lim_{A \to \infty}\left[\overline{\lim_{u \to \infty}} \frac{1}{u(1-F(u))} \int_{Au}^{+\infty} x \, dF(x)\right] = 0 \tag{V.49}$$

Pour montrer ce résultat, considérons l'inégalité de droite de (V.26). Si on y fait $k = A$ et $\lambda = 1$, elle s'écrit ($A > 1$) :

$$\int_{A^n u}^{A^{n+1}u} x\, dF(x) \leqq bu(1 - F(u))\, [A(A^{-\alpha} + \eta)]^n \tag{V.50}$$

et ainsi :

$$\frac{1}{u(1 - F(u))} \int_{Au}^{+\infty} x\, dF(x) = \frac{1}{u(1 - F(u))} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A^n u}^{A^{n+1}u} x\, dF(x) \leqq b \sum_{n=1}^{+\infty} (A^{1-\alpha} + \eta A)^n \tag{V.51}$$

Donnons ε compris entre 0 et 1. Si $\alpha > 1$, pour A assez grand, on a $A^{1-\alpha} < \varepsilon/2$; pour n assez grand, on peut prendre $\eta < \varepsilon/2A$. Alors :

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{u(1 - F(u))} \int_{Au}^{+\infty} x\, dF(x) \leqq \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \tag{V.52}$$

d'où le résultat.

LEMME 10 - Si $F(x) \in D.A.\ \Phi_\alpha(x)$ avec $\alpha > 1$, pour tout $u \geqq \eta > 0$, et pour tout $B \geqq B > 0$, la quantité :

$$\frac{1}{u(1 - F(u))} \int_{Bu}^{+\infty} x\, dF(x) \tag{V.53}$$

est uniformément bornée. On a un résultat équivalent pour les valeurs négatives.

La démonstration du lemme 9 montre le résultat pour u assez grand ($u \geqq u_0$) et pour $A = B > 1$. on peut écrire (V.53) sous la forme :

$$\frac{1}{u(1 - F(u)} \int_{Bu}^{Au} x\, dF(x) + \frac{1}{u(1 - F(u))} \int_{Au}^{+\infty} x\, dF(x) \tag{V.54}$$

le deuxième terme de (V.54) est borné uniformément pour $u \geqq u_o > 0$; quant au premier, il est majoré par :

$$\frac{Au(1 - F(Bu))}{u(1 - F(u)} \longrightarrow \frac{A}{B^\alpha} < \frac{A}{B_o^\alpha} \tag{V.55}$$

quand $u \longrightarrow \infty$. Pour u assez grand ($u \geqq u_1$), comme la convergence est uniforme pour $B \geqq B_o > 0$, ce terme est uniformément borné.

Reste à montrer que (V.53) est uniformément borné pour $u < \sup(u_o, u_1) = U$. En effet il est borné par :

$$\frac{1}{\eta(1 - F(U))} \int_{B\eta}^{+\infty} x\, dF(x) < \infty \tag{V.56}$$

donc uniformément borné.

V.3 - LA LOI DU TRIPLET S_n, Y_n, Z_n ET LA CLASSIFICATION DE SES LOIS LIMITES

V.3.1 - Recherche d'une expression liée à la loi de probabilité du triplet Y_n, Z_n, S_n

Nous cherchons à étudier :

$$G_n(s, y, z) = \text{Prob} \begin{bmatrix} S_n < s \\ Y_n < y \\ Z_n \geqq z \end{bmatrix} \tag{V.57}$$

soit :

$$G_n(s, y, z) = \text{Prob}\,[S_n < s\ ;\ Y_n < y\ ;\ Z_n \geqq z]\ \text{Prob} \begin{bmatrix} Y_n < y \\ Z_n \geqq z \end{bmatrix} \tag{V.58}$$

L'étude de Prob $[S_n < s\ ;\ Y_n < y,\ Z_n \geq z]$ se fait en remarquant avec le théorème II.2 que c'est la fonction de répartition d'une somme de n variables aléatoires indépendantes issues de la distribution de fonction de répartition F(x) tronquée supérieurement en y et inférieurement en z. La fonction caractéristique correspondante est donc :

$$\left[\int_z^y e^{itx}\ \frac{dF(x)}{F(y) - F(x)}\right]^n \tag{V.59}$$

Ainsi pour étudier $G_n(s,\ y,\ z)$ il suffira d'étudier sa transformée :

$$\varphi_n(t \mid y,\ z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{its}\ d_s\ G_n(s,\ y,\ z) = \left[\int_z^y e^{itx}\ dF(x)\right]^n \tag{V.60}$$

En particulier nous montrerons l'indépendance asymptotique légale de ce triplet (quand elle a lieu), en montrant que $\varphi_n(t \mid y,\ z)$ se présente asymptotiquement sous la forme d'un produit de trois fonctions de t, de y et de z.

V.3.2 - Méthode de recherche des lois-limites

Comme nous l'avons annoncé en V.1.1 nous allons supposer que les valeurs extrêmes ont des lois-limites, autrement dit qu'il existe des suites de constantes a_n et α_n positives, b_n et β_n telles que :

$$[F(a_n\ y + b_n)]^n \longrightarrow L(y) \tag{V.61}$$

$$[1 - F(\alpha_n\ z - \beta_n)]^n \longrightarrow L'(z) \tag{V.62}$$

où L(y) et L'(z) sont du même type que les lois indiquées en (V.1.2). Afin de normer convenablement S_n, Y_n, Z_n faisons les changements :

$$S_n \text{ par } \frac{S_n}{\xi_n} - \eta_n,\quad Z_n \text{ par } \frac{Z_n + \beta_n}{\alpha_n},\quad Y_n \text{ par } \frac{Y_n + b_n}{a_n}$$

On est donc conduit à étudier les formes limites de :

$$K_n(t,\ y,\ z) = \left[\int_{\alpha_n x - \beta_n \leq X < a_n y + b_n} \exp\left[it\left(\frac{x}{\xi_n} - \frac{\eta_n}{n}\right)\right] dF(x)\right]^n \tag{V.63}$$

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} dF(x) = 1$, on peut encore écrire :

$$K_n(t,\ y,\ z) = \left[1 + \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\exp\left(it\left(\frac{x}{\xi_n} - \frac{\eta_n}{n}\right)\right) - 1\right] dF(x) - \int_{a_n y + b_n}^{+\infty} \exp\left(it\left(\frac{x}{\xi_n} - \frac{\eta_n}{n}\right)\right) dF(x) - \int_{-\infty}^{\alpha_n x - \beta_n} \exp\left(it\left(\frac{x}{\xi_n} - \frac{\eta_n}{n}\right)\right) dF(x)\right]^n \tag{V.64}$$

Choisissons ξ_n et η_n de façon que si $n \longrightarrow \infty$, $\xi_n \longrightarrow \infty$, et $\eta_n/n \longrightarrow 0$; alors :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\left(it\left(\frac{x}{\xi_n} - \frac{\eta_n}{n}\right) - 1\right)\right] dF(x) \tag{V.65}$$

converge vers 0 : elle est en effet uniformément convergente, et l'intégrande converge vers 0.

Quant aux deux autres intégrales de (V.64), elles sont en modules respectivement inférieures à :

$$1 - F(a_n\ y + b_n) \quad \text{et} \quad F(\alpha_n\ z + \beta_n) \tag{V.66}$$

donc convergent vers 0 (Lemme 2). De ces observations, nous concluons que K_n se met sous la forme $(1 + u_n)^n$ où $u_n \longrightarrow 0$. Il revient donc au même d'étudier la limite de nu_n, à savoir d'étudier :

$$nu_n = n\,I_1 + n\,I_2 + n\,I_3 - n(1 - F(a_n\,y + b_n)) - n\,F(\alpha_n\,z - \beta_n) \qquad (V.67)$$

où on a posé :

$$I_2 = -\int_{-\infty}^{a_n z - \beta_n} \left[\exp\left(it\left(\frac{x}{\xi_n} - \frac{\eta_n}{n} \right) \right) - 1 \right] dF(x) \qquad (V.68)$$

$$I_3 = \int_{a_n y + b_n}^{+\infty} \left[\exp\left(it\left(\frac{x}{\xi_n} - \frac{\eta_n}{n} \right) \right) - 1 \right] dF(x) \qquad (V.69)$$

d'après le lemme 2 :

$$-n(1 - F(a_n\,y + b_n)) \longrightarrow \log\,L(y) \quad \text{et} \quad -n\,F(\alpha_n\,z - \beta_n) \longrightarrow \log\,L'(z)$$

Finalement, comme α_n, β_n, a_n, b_n sont connus suivant les types des lois limites L(y) et L'(z) (voir V.1.2), on voit que si on connaît la limite de $n\,I_1$, qui est la loi limite de la deuxième fonction caractéristique de la moyenne, et si on connaît les coefficients ξ_n et η_n, nous aurons finalement la limite de $n\,I_2$ et de $n\,I_3$, comme nous allons le voir ; or si on connaît les types possibles de lois-limites pour les moyennes (voir par exemple P. LEVY [14], GNEDENKO-KOLMOGOROV [9], LOEVE [15], LUKACS [16], etc.), on n'a pas à proprement parler en général d'expression explicite pour ξ_n et η_n : nous allons ici donner ξ_n et η_n en fonction de a_n, α_n, b_n, β_n et retrouver les lois limites possibles des moyennes.

Supposons alors que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\xi_n} = \mu \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{\xi_n} = \nu$$

Etudions par exemple $n\,I_3$; pour cela, nous faisons dans (V.69) le changement de variable $x = a_n\,v + b_n$; il vient :

$$n\,I_3 = \int_y^{+\infty} \left[\exp\left(it\left(\frac{a_n}{\xi_n} v + \frac{b_n}{\xi_n} - \frac{\eta_n}{n} \right) \right) - 1 \right] d\left[n(1 - F(a_n\,v + b_n) \right] \qquad (V.70)$$

On peut remplacer sous le signe différentielle $n\,(1 - F(a_n\,v + b_n)$ par sa limite, à savoir $-\log\,L(v)$; en effet la différence avec $n\,I_3$ est majorée par :

$$\int_y^{+\infty} d\,[n(1 - F(a_n\,v + b_n) + \log\,L(v)] \qquad (V.71)$$

soit :

$$-2\,[n(1 - F(a_n\,y + b_n)) + \log\,L(y)] \longrightarrow 0 \qquad (V.72)$$

Quand à l'intégrande il converge vers $e^{it(\mu v + \nu)}$. Ainsi :

$$\lim\, n\,I_3 = \int_y^{+\infty} [e^{it(\mu v + \nu)} - 1] \quad d(-\log\,L(v)) \qquad (V.73)$$

On a, bien entendu, un résultat analogue pour $\lim\, n\,I_2$.

Pour qu'il y ait indépendance limite légale du triplet, il sera donc équivalent de montrer que $\lim\, n\,I_2 = \lim\, n\,I_3 = 0$, donc que :

$$\lim \frac{a_n}{\xi_n} = \lim \frac{b_n}{\xi_n} = \lim \frac{\alpha_n}{\xi_n} = \lim \frac{\beta_n}{\xi_n} = 0$$

V.3.3 - Analyse des différentes lois-limites

A priori on doit obtenir les différents cas en prenant chaque type de lois-limites pour les valeurs extrêmes et en les combinant :

$$L \in \Lambda\,,\ \Phi_\alpha\,,\ \Psi_\alpha \qquad L' \in \Lambda'\,,\ \Phi'_\beta\,,\ \Psi'_\beta$$

soit en tout neuf possibilités. En fait, par raison de symétrie, il suffit d'examiner les six associations suivantes :

$$\Lambda'\Phi,\ \Psi'\Phi,\ \Phi\Phi',\ \Psi\Psi',\ \Lambda\Lambda',\ \Lambda\Psi'$$

1/ Nous allons voir que si la variance existe, on a toujours indépendance limite légale dans le triplet. Ce cas inclut bien sûr $\Psi\Psi'$; mais les lemmes 3 et 4 montrent que la variance existe aussi dans les cas suivants :

$$\Lambda\Psi',\ \Lambda\Lambda',\ \Psi'\Phi_\alpha,\ \Lambda'\Phi_\alpha,\ \Phi'_\beta\Phi'_\alpha$$

à condition que α et β soient supérieurs à 2 (la variance pouvant d'ailleurs exister si $\alpha = \beta = 2$) ; nous montrerons ensuite que même si la variance n'existe pas, si α ou β sont égaux à 2, il y a indépendance limite légale, la loi limite de la moyenne étant encore une loi normale.

2/ Nous serons amenés à étudier ensuite les cas où Z_n est légalement asymptotiquement indépendante de S_n et Y_n, ces dernières v. a. restant liées ; ceci se produira dans les cas suivants :

$$\Lambda'\Phi_\alpha,\ \Psi'\Phi_\alpha,\ \Phi'_\beta\Phi_\alpha \quad \text{avec} \quad \beta > \alpha \quad \text{et} \quad \alpha < 2$$

et dans les cas symétriques.

Nous serons amenés à distinguer les sous-cas suivants, correspondants d'ailleurs aux différentes lois stables :

$$1 < \alpha < 2$$

$$0 < \alpha < 1$$

$$\alpha = 1$$

3/ Nous supposerons enfin $\alpha = \beta$, et nous verrons que S_n, Y_n, Z_n peuvent être liées asymptotiquement, mais S_n n'a pas nécessairement une loi limite.

Nous aurons ainsi épuisé tous les cas possibles.

V.4 - INDEPENDANCE LIMITE LEGALE DE LA MOYENNE ET DES VALEURS EXTREMES

N.B. Dans tout ce qui suivra, on supposera $|t| \leqq T$, les résultats étant uniformément valables dans $|t| \leqq T$.

V.4.1 - Cas où la variance existe

Dans ce cas, on sait qu'en posant $\xi_n = \sigma\sqrt{n}$, $\eta_n = \dfrac{m\sqrt{n}}{\sigma}$ où l'on désigne par m et σ la moyenne et l'écart-type de la fonction de répartition F(x), on a :

$$\lim n I_1 = -\frac{t^2}{2}$$

Quant à $n I_2$ et $n I_3$, leur limite est nulle : pour le voir il suffit de montrer que :

$$\lim \frac{a_n}{\xi_n} = \lim \frac{a_n}{\sigma\sqrt{n}} = 0$$

$$\lim \frac{b_n}{\xi_n} = \lim \frac{b_n}{\sigma\sqrt{n}} = 0$$

Si $L = \Psi$, a_n et b_n étant finis, ces résultats sont évidents.

Si $L = \Lambda$, $\dfrac{a_n}{b_n} \longrightarrow 0$ et $\dfrac{b_n}{\sqrt{n}} \cdot \dfrac{F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$.

Si $L = \Phi$, $b_n = 0$, $\frac{a_n}{\sqrt{n}} = \frac{F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{\log n}} \longrightarrow 0.$

car si la variance existe on peut faire $\lambda = 2$ dans le lemme 6.

THEOREME V.1 - Si la variance existe, et si les valeurs extrêmes ont des lois limites, la moyenne est asymptotiquement légalement indépendante des valeurs extrêmes.

Ce résultat trouvé directement en [19] et [24] de façon indépendante et simultanée, est une conséquence du théorème III. 1.

V.4.2 - Cas où la variance n'existe pas

Nous supposons, comme nous l'avons vu $\alpha = 2$, et $L' \in \Psi'$, Λ' ou Φ'_β avec $\beta \geq 2$. Nous supposerons de plus que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, dF(x) = \infty$$

D'après le lemme 3 la moyenne :

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, dF(x)$$

existe et peut donc être prise égale à 0, afin de simplifier l'écriture ; on prendra alors $\eta_k = 0$. On a, dans ce cas :

$$n I_1 = n \int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{it\frac{x}{\xi_n}} - it\frac{x}{\xi_n} - 1 \right] dF(x) \qquad (V.74)$$

Effectuons le partage suivant :

$$n I_1 = n \int_{-\alpha_n}^{+a_n} + n \int_{-\infty}^{-\alpha_n} + n \int_{a_n}^{+\infty} \qquad (V.75)$$

en choisissant $a_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ et $\alpha_n = -F^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$. En choisissant ξ_n, les deux derniers termes du second membre de (V.75) tendent vers 0. En effet, par exemple :

$$\left| n \int_{a_n}^{+\infty} \right| \leq \frac{2\,nt}{\xi_n} \int_{a_n}^{+\infty} x \, dF(x) \qquad (V.76)$$

Or,

$$\frac{n}{\xi_n}\int_{a_n}^{+\infty} x \, dF(x) = \frac{a_n}{\xi_n} \cdot \frac{n(1 - F(a_n))}{a_n(1 - F(a_n))} \int_{a_n}^{+\infty} x \, dF \sim \frac{a_n}{\xi_n} \frac{1}{a_n(1 - F(a_n)} \int_{a_n}^{+\infty} x \, dF \qquad (V.77)$$

D'après le lemme 10, puisque $\alpha > 1$, $\frac{1}{a_n(1 - F(a_n)} \int_{a_n}^{+\infty} x \, dF(x)$ reste bornée. Si de plus on choisit ξ_n de telle sorte que $\frac{a_n}{\xi_n}$ tende vers 0 on voit que $n \int_{a_n}^{+\infty}$ converge vers 0. On montrerait de même si $L' = \Phi'_2$ que $n \int_{-\infty}^{\alpha_n}$ converge vers 0. Si $L' \neq \Phi'_2$ le moment du deuxième ordre à gauche existe et par suite :

$$n \left| \int_{-\infty}^{-\alpha_n} \right| < C^{te} \frac{n}{\xi_n^2} \qquad (V.78)$$

nous verrons que le choix fait de ξ_n montre que (V.78) converge vers 0.

Il ne nous reste plus qu'à étudier la limite :

$$n \int_{-\alpha_n}^{a_n} \left[e^{itx/\xi_n} - it\frac{x}{\xi_n} - 1 \right] dF(x) \qquad (V.79)$$

Comme $-\frac{\alpha_n}{\xi_n} < \frac{x}{\xi_n} < \frac{a_n}{\xi_n}$, et que les termes extrêmes de ces inégalités tendent vers 0, (V. 78) sera équivalente, quand $n \longrightarrow \infty$, à :

$$-\frac{t^2}{2} \frac{n}{\xi_n^2} \int_{-\alpha_n}^{a_n} x^2 \, dF(x) \qquad (V.80)$$

Si on prend :

$$\underline{\xi_n^2 = n \int_{-\alpha_n}^{a_n} x^2 \, dF(x)}$$

la limite de $n I_1$ est $-t^2/2$ et la loi limite de S_n est la loi de Gauss.

Afin de rendre valable notre démonstration, nous devons vérifier que :

$$\frac{n}{\xi_n^2} \longrightarrow 0, \frac{a_n}{\xi_n} \longrightarrow 0, \frac{\alpha_n}{\xi_n} \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad L' = \Phi'_2 \qquad (V.82)$$

Dans ce cas, d'après V.3.2 il y a <u>indépendance limite légale</u>.

$1/\frac{n}{\xi_n^2} = \frac{1}{\int_{-\alpha_n}^{a_n} x^2 \, dF(x)} \longrightarrow 0$ puisque $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, dF(x) = \infty$.

2/ L'étude de $\frac{a_n}{\xi_n}$ et de $\frac{\alpha_n}{\xi_n}$ est analogue si $L' = \Phi'_2$. Sinon l'étude de $\frac{\alpha_n}{\xi_n}$ n'est pas utile. Nous avons donc à montrer que :

$$\frac{n}{a_n^2} \int_{-\alpha_n}^{a_n} x^2 \, dF(x) \longrightarrow \infty \qquad (V.83)$$

Pour cela il suffit de voir que, puisque $n(1 - F(a_n) \longrightarrow 1$:

$$\frac{1}{a_n^2 (1 - F(a_n))} \int_C^{a_n} x^2 \, dF(x) \longrightarrow \infty \qquad (V.84)$$

où C désigne une constante quelconque ; en ne particularisant pas a_n il suffit de montrer que :

$$R = \frac{1}{u^2(1 - F(u))} \int_C^u x^2 \, dF(x) \longrightarrow \infty \qquad (V.85)$$

Cette expression est à rapprocher de la condition nécessaire et suffisante de convergence de S_n vers la loi normale (condition de KHINTCHINE : voir [12] et [9]). Nous allons voir que (V. 85) est vérifiée si $\underline{L(x) = \Phi_2(x)}$; en effet on sait que pour $k > 1$, $\lim_{y \to \infty} \frac{1 - F(y)}{1 - F(ky)} = k^2$; ainsi, étant donné $\rho > 0$, pour $C > C_o(\rho)$, on a :

$$\frac{1 - F(C)}{1 - F(kC)} > k^2 - \rho \qquad (V.86)$$

Nous prendrons ρ assez petit, de façon à avoir :

$$\frac{1}{\rho} \left[1 - \frac{\rho + 1}{k^2} \right] \geqq B \qquad (V.87)$$

où $B > 0$ est une constante arbitraire donnée, aussi grande qu'on veut.

Soit maintenant n tel que $k^n C < u$ et $k^{n+1} C > u$; on a :

$$\int_C^u x^2\, dF(x) \geqq \int_C^{kC} x^2\, dF + \int_{kC}^{k^2C} x^2\, dF(x) + \ldots + \int_{k^{n-1}C}^{k^nC} x^2\, dF(x) \tag{V.88}$$

Or :

$$\int_C^{kC} x^2\, dF(x) \geqq C^2\,[F(kC) - F(C)] \geqq C^2(k^2 - \rho - 1)\,(1 - F(kC)) \tag{V.89}$$

Posons $a = k^2 - \rho - 1$ et remplaçons C par $kC > C > C_0$ etc., il vient :

$$\int_C^{kC} x^2\, dF(x) \geqq aC^2[1 - F(kC)],\ \int_{kC}^{k^2C} x^2\, dF(x) \geqq aC^2 k^2\,[1 - F(k^2C)] \text{ etc.} \tag{V.90}$$

donc :

$$\int_C^u x^2\, dF(x) \geqq aC^2\{[1 - F(kC)] + k^2[1 - F(k^2C)] + \ldots + k^{2(n-1)}[1 - F(k^nC)]\} \tag{V.91}$$

multipliant membre à membre les inégalités (V.86), on obtient :

$$\frac{1 - F(kC)}{1 - F(k^nC)} \geqq (k^2 - \rho)^{n-1},\ \frac{1 - F(k^2C)}{1 - F(k^nC)} > (k^2 - \rho)^{n-2} \text{ etc.} \tag{V.92}$$

Soit, après mise en facteur :

$$R \geqq \frac{a\,C^2\,k^{2(n-1)}\,[1 - F(k^nC)]}{u^2(1 - F(u))} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{k^2 - \rho}{k^2}\right)^i \tag{V.93}$$

Or :

$$\frac{1 - F(k^nC)}{1 - F(u)} \geqq 1\ (k^nC \leqq u) \quad \text{et} \quad \left(\frac{k^{n+1}C}{u}\right)^2 \geqq 1\ (k^{n+1}C > u) \tag{V.94}$$

donc :

$$R \geqq \frac{a}{k^4} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{k^2 - \rho}{k^2}\right)^i \tag{V.95}$$

et par conséquent :

$$\lim_{n \to \infty} R \geqq \frac{a}{k^4} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{k^2 - \rho}{k^2}\right)^i = \frac{a}{k^2\rho} = \left(1 - \frac{\rho + 1}{k}\right) \frac{1}{\rho} \geqq B \tag{V.96}$$

Comme B est arbitrairement grand, ceci montre que $R \longrightarrow \infty$.

Nous verrons du reste plus loin que dans les autres cas non encore étudiés, on n'a jamais à la fois $\lim n I_2 = \lim n I_3 = 0$, et la loi-limite de la moyenne n'est pas la loi de Gauss. Ainsi :

THEOREME V.2 - Pour que les valeurs extrêmes soient ensemble légalement asymptotiquement indépendantes de la moyenne, il faut et il suffit que leurs lois limites soient du type Ψ, Λ, Φ_α avec $\alpha \geqq 2$. Alors et seulement alors, la loi-limite de la moyenne est la loi de Gauss.

Ce résultat (voir aussi notre étude [19]) est à mettre en parallèle avec le théorème III.1.

V.5 - CAS OU LA MOYENNE N'EST ASYMPTOTIQUEMENT LEGALEMENT INDEPENDANTE QUE D'UNE SEULE VALEUR EXTREME

Nous supposons que $L = \Phi_\alpha$ et que $L' = \Lambda$, Ψ, Φ_β (avec $\beta > \alpha$).

V.5.1 - Sous cas $1 < \alpha < 2$

D'après le lemme 3, $m = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, dF(x)$ existe : on prendra $m = 0$, et $\eta_n = 0$ et on écrit, comme au paragraphe précédent :

$$n I_1 = n \int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{it\frac{x}{\xi_n}} - it\frac{x}{\xi_n} - 1 \right] dF(x)$$

Nous effectuons le partage suivant :

$$n I_1 = n \int_{-\infty}^{-B\alpha_n} + n \int_{-B\alpha_n}^{0} + n \int_{0}^{a_n} + n \int_{a_n}^{Aa_n} + n \int_{Aa_n}^{+\infty} \qquad (V.97)$$

en se donnant $B > 0$, $A > 0$, $\varepsilon > 0$ (A aussi grand et ε aussi petit qu'on veut).

Choisissons $\xi_n = a_n$. On peut écrire, en supposant d'abord $L' = \Phi'_\beta$:

a) $$\left| n \int_{-\infty}^{-B\alpha_n} \right| \leqq 2\, nt \frac{\alpha_n}{a_n} \frac{1}{\alpha_n} \int_{-\infty}^{-B\alpha_n} x\, dF(x) \sim 2t \frac{\alpha_n}{a_n} \frac{1}{\alpha_n F(-\alpha_n)} \int_{-\infty}^{-B\alpha_n} x\, dF(x) \qquad (V.98)$$

D'après le lemme 10, comme $\beta > 1$, $\frac{1}{\alpha_n F(-\alpha_n)} \int_{-\infty}^{-B\alpha_n} x\, dF(x)$ est borné. D'autre part comme $L = \Phi_\alpha$ et $L' = \Phi'_\beta$, on a d'après les lemmes 3, 4, 5, $\alpha_n < n^{1/\beta+\varepsilon'}$ et $a_n > n^{1/\alpha-\varepsilon''}$ $(\varepsilon', \varepsilon'' > 0)$ donc :

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n} < \frac{n^{\frac{1}{\beta}+\varepsilon'}}{n^{\frac{1}{\alpha}-\varepsilon''}} = n^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}+\varepsilon'+\varepsilon''} \qquad (V.99)$$

Comme $\beta > \alpha$, il suffit de choisir $\varepsilon' + \varepsilon'' < \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}$ pour voir que $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$, donc, $\int_{-\infty}^{-B\alpha_n}$ convergent vers 0.

b) Etude de $n \int_{-B\alpha_n}^{0}$

Comme $\frac{\alpha_n}{\xi_n} = \frac{\alpha_n}{a_n} \longrightarrow 0$, dans le champ d'intégration on a :

$$e^{it\,x/\xi_n} - it\frac{x}{\xi_n} - 1 \sim -\frac{1}{2} t^2 \frac{x^2}{\xi_n^2}$$

d'où :

$$n \left| \int_{-B\alpha_n}^{0} \right| \sim -\frac{t^2}{2} \frac{n}{a_n^2} \int_{-B\alpha_n}^{0} x^2\, dF(x) \qquad (V.100)$$

Soient ρ et ρ' positifs, aussi petits qu'on veut ; on a :

$$\int_{-B\alpha_n}^{0} x^2\, dF(x) = \int_{-B\alpha_n}^{0} |x|^{\beta-\rho}\, |x|^{2-\beta+\rho}\, dF(x) \leqq (B\alpha_n)^{2-\beta+\rho} \int_{-\infty}^{0} x^{\beta-\varepsilon}\, dF(x) \qquad (V.101)$$

Mais d'après le lemme 3 $\int_{-\infty}^{0} |x|^{\beta-\rho}\, dF(x) < \infty$; comme d'autre part $\alpha_n \leqq n^{\frac{1}{\beta}+\rho}$ et $a_n \geqq n^{\frac{1}{\alpha}-\rho'}$, on voit que :

$$n \left| \int_{-B\alpha_n}^{0} \right| \leqq C^{te} \frac{n}{n^{\frac{2}{\alpha}-2\rho'}} \cdot n^{\left(\frac{1}{\beta}+\rho\right)(2-\beta+\rho)} = C^{te}\, n^{\frac{2(\alpha-\beta)}{\alpha\beta}+\xi} \qquad (V.102)$$

où ξ est infiniment petit avec ρ et ρ' ; comme $\alpha < \beta$, l'exposant de n de (V.102) peut être pris négatif ; ainsi :

$$n \int_{-B\alpha_n}^{0} \quad \text{converge vers 0.}$$

Si $L' \neq \Phi_\beta$ on a $L' = \Lambda$ ou $L' = \Psi$: la variance existe et dans ce cas :

$$\left| n \int_{-\infty}^{0} \left[e^{-it/\xi_n} - \frac{it}{\xi_n} - 1 \right] dF(x) \right| < \frac{n}{\xi_n^2} \frac{t^2}{2} \int_{-\infty}^{0} x^2 \, dF(x) \tag{V.103}$$

Or $\xi_n = a_n > n^{\frac{1}{\alpha} - \eta}$; on peut encore majorer (V.103) par :

$$C^{te} \frac{t^2}{2} n^{1 - \frac{2}{\alpha} + 2\eta} \longrightarrow 0 \tag{V.104}$$

à condition de choisir $\eta < \frac{2 - \alpha}{2\alpha}$ $(\alpha < 2)$.

c) Etude de $n \int_{0}^{\epsilon a_n}$:

La majoration analogue à (V.103) donne :

$$n \left| \int_{0}^{\epsilon a_n} \right| \leqq \frac{n}{a_n^2} \frac{t^2}{2} \int_{0}^{\epsilon a_n} x^2 \, dF(x) \tag{V.105}$$

Comme $n(1 - F(a_n)) \longrightarrow 1$, nous voyons que pour montrer que $n \int_{0}^{\epsilon a_n}$ peut être minoré par une fonction de ε (tendant vers 0 avec ε) il suffit de le montrer pour :

$$K = \frac{1}{u^2(1 - F(u))} \int_{0}^{\epsilon u} x^2 \, dF(x) \tag{V.106}$$

quand $u \longrightarrow \infty$.

Soit λ tel que $\alpha < \lambda < 2$; on a :

$$K = \frac{1}{u^2(1 - F(u))} \int_{0}^{\epsilon u} x^{2-\lambda} \, x^{\lambda} \, dF(x) \leqq \frac{\varepsilon^{2-\lambda}}{u^{\lambda}(1 - F(u))} \int_{0}^{u} x^{\lambda} \, dF(x) \tag{V.107}$$

en prenant $\varepsilon < 1$.

Soit maintenant C un nombre aussi grand qu'on veut, mais fixe, qu'on déterminera plus loin. Posons :

$$H = \frac{\int_{C}^{u} x^{\lambda} \, dF(x)}{u^{\lambda}(1 - F(u))} \tag{V.108}$$

On sait que $u^{\lambda}(1 - F(u)) \longrightarrow \infty$ (lemme 8) ; ainsi :

$$\frac{\int_{0}^{C} x^{\lambda} \, dF(x)}{u^{\lambda}(1 - F(u))} \longrightarrow 0 \tag{V.109}$$

Nous allons montrer que H est borné pour C assez grand : nous utiliserons une méthode semblable à celle exposée de (V.85) à (V.96). En effet, comme :

$$L = \Phi_\alpha \Longrightarrow \lim_{C \to \infty} \frac{1 - F(C)}{1 - F(kC)} = k^{\alpha}$$

Ainsi pour C assez grand, par exemple $C \geqq C_0(\rho)$, on a en choisissant $k > 1$:

$$\frac{1 - F(C)}{1 - F(kC)} < k^{\alpha} + \rho \tag{V.110}$$

En remplaçant C par kC etc., il vient :

$$\frac{1 - F(k^{i-1}C)}{1 - K(k^{i}C)} < k^{\alpha} + \rho \ (i = 1, \ldots, n) \tag{V.111}$$

En multipliant membre à membre ces inégalités, il vient :

$$1 - F(k^{i}C) < [1 - F(k^{n}C)]\ [k^{\alpha} + \rho]^{n-i} \tag{V.112}$$

Déterminons n par $k^{n-1}\ C \leqq u$ et $k^{n}\ C > u$; on a :

$$H \leqq \frac{1}{u^{\lambda}\ (1 - F(u))} \left[\int_{C}^{kC} x^{\lambda}\ dF + \ldots + \int_{k^{n-1}C}^{k^{n}C} x^{\lambda}\ dF \right] \tag{V.113}$$

Or :

$$\int_{C}^{kC} x^{\lambda}\ dF(x) \leqq k^{\lambda}\ C^{\lambda}\ [F(kC) - F(C)] \leqq k^{\lambda}\ C^{\lambda}\ [1 - F(kC)]\ [k^{\alpha} + \rho - 1] \tag{V.114}$$

en changeant C en k C etc., il vient :

$$\int_{k^{i-1}C}^{k^{i}C} x^{\lambda} dF(x) \leqq k^{\lambda i}\ C^{\lambda}\ [1 - F(k^{i}C)]\ [k^{\alpha} + \rho - 1] \tag{V.115}$$

En utilisant (V.112), il vient :

$$\int_{k^{i-1}C}^{k^{i}C} x^{\lambda}\ dF(x) \leqq C^{\lambda}\ k^{\lambda i}\ (k^{\alpha} + \rho)^{n-i}\ [1 - F(k^{n}C)]\ [k^{\alpha} + \rho - 1] \tag{V.116}$$

donc :

$$H \leqq \frac{(k^{n}C)^{\lambda}\ [1 - F(k^{n}C)]}{u^{\lambda}\ [1 - F(u)]} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{k^{\alpha} + \rho}{k^{\lambda}} \right)^{j} (k^{\alpha} + \rho - 1) \tag{V.117}$$

La façon dont nous avons choisi n montre que :

$$\frac{1 - F(k^{n}C)}{1 - F(u)} \leqq 1 \quad \text{et que} \quad \left(\frac{k^{n}C}{u} \right)^{\lambda} \leqq k^{\lambda}$$

donc que :

$$H \leqq (k^{\alpha} + \rho - 1)\ k^{\lambda} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{k^{\alpha} + \rho}{k^{\lambda}} \right)^{j} \leqq (k^{\alpha} + \rho - 1)\ k^{\lambda} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{k^{\alpha} + \rho}{k^{\lambda}} \right)^{j} \tag{V.118}$$

La série géométrique de raison $\frac{k^{\alpha} + \rho}{k^{\lambda}}$ converge si on prend $\rho < k^{\lambda} - k^{\alpha}$, ce qui est possible puisque $k > 1$ et $\lambda > \alpha$. Ainsi H est borné par une constante H_o et :

$$\overline{\lim_{u \to \infty}}\ K(u) \leqq H_o\ \varepsilon^{2-\lambda} \tag{V.119}$$

d) Etude de $n \int_{Aa_n}^{+\infty}$.

$$n \left| \int_{Aa_n}^{+\infty} \right| \leqq \frac{2\ H\ n}{a_n} \int_{Aa_n}^{+\infty} x\ dF(x) \sim \frac{2\ |t|}{a_n(1 - F(a_n))} \int_{Aa_n}^{+\infty} x\ dF(x) \tag{V.120}$$

pour A assez grand $n \int_{Aa_n}^{+\infty}$ peut donc être rendu aussi petit que désiré (voir lemme 9 : $\alpha > 1$).

c) Etude de $n \int_{a_n}^{Aa_n} \left(e^{it\frac{x}{a_n}} - it\frac{x}{a_n} - 1 \right) dF(x)$.

En faisant le changement de variable $x = a_n v$, cette intégrale s'écrit :

$$n \int_{\epsilon}^{A} (e^{itv} - itv - 1)\, dF(a_n v) \tag{V.121}$$

une intégration par partie donne :

$$-{}_{\epsilon}^{A}[n(1 - F(a_n v))\,(e^{itv} - itv - 1)] + it \int_{\epsilon}^{A} (e^{itv} - 1)\, n(1 - F(a_n v))\, dv \tag{V.122}$$

Comme $n(1 - F(a_n v)) \longrightarrow v^{-\alpha}$ $(v > 0)$, la limite cherchée sera :

$$-{}_{\epsilon}^{A}[v^{-\alpha}(e^{itv} - itv - 1)] + it \int_{\epsilon}^{A} (e^{itv} - 1)\frac{dv}{v^{\alpha}} \tag{V.123}$$

elle est atteinte uniformément en t.

Si maintenant, on fait $A \longrightarrow \infty$, et $\varepsilon \longrightarrow 0$, la partie toute intégrée est équivalente à $\frac{-t^2 v^{2-\alpha}}{2}$ quand $v \longrightarrow 0$, et est bornée en module par $tv^{1-\alpha}$ quand $v \longrightarrow 0$: elle tend vers 0 ; d'après a) b) c) d) il vient donc :

$$\underline{\lim_{n \to \infty} n I_1 = it \int_{0}^{+\infty} (e^{itv} - 1)\frac{dv}{v^{\alpha}}} \tag{V.124}$$

C'est une des lois stables de PAUL LEVY. Mais nous avons aussi montré que :

$$\lim n I_2 = 0 \quad \text{et} \quad \lim n I_3 = \alpha \int_{y}^{+\infty} [e^{itv} - 1]\frac{dv}{v^{\alpha+1}} \tag{V.125}$$

V.5.2 - Sous cas où $0 < \alpha < 1$

Nous reprenons rapidement l'étude faite dans le paragraphe précédent en signalant les différences.

On choisit $a_n = \xi_n$ et $\eta_n = 0$. On effectue un partage analogue à (V.97) sur :

$$n I_1 = n \int_{-\infty}^{+\epsilon} \left[e^{it\frac{x}{a_n}} - 1 \right] dF(x)$$

a) On a :

$$n \left| \int_{-\infty}^{-Ba_n} \right| < 2\, n\, F(-B\alpha_n) \tag{V.126}$$

Or $n\, F(-B\alpha_n)$ converge uniformément en $B(B \leq b < 0)$ vers $\frac{1}{(B)^{\alpha}}$; donc pour $B = B_o(\delta)$ et pour $n > n(\delta)$, on a :

$$\left| n \int_{-\infty}^{-B_o a_n} < \delta \right| \tag{V.127}$$

$\delta > 0$ étant donné.

On fixera $B = B_o$ dans la suite.

b) Etude de $n \int_{-B_o a_n}^{0}$:

On a :

$$n \left| \int_{-B_o a_n}^{0} \right| \leq |t| \frac{n}{a_n} \int_{-B_o a_n}^{0} x\, dF(x) \leq |t| \frac{(\alpha_n)^{1-\beta+\eta}}{a_n}\, n\, B_o^{1-\beta+\eta} \int_{-\infty}^{0} |x|^{\beta-\eta}\, dF(x) \tag{V.128}$$
$$\tag{V.129}$$

On montre ainsi que :

$$\left| n \int_{-B_0 a_n}^{0} \right| < C^{te}\ n^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}+\xi} \tag{V.130}$$

en utilisant les lemmes 3, 4, 5. ξ étant pris assez petit, l'expression étudiée converge vers 0.

c) Etude de $n \int_0^{\epsilon a_n}$:

On voit facilement que :

$$\left| n \int_0^{\epsilon a_n} \right| \leqq |t| \frac{n}{a_n} \int_0^{\epsilon a_n} x\, dF(x) \tag{V.131}$$

On est ainsi amené à étudier :

$$K = \frac{1}{u(1 - F(u))} \int_0^{\epsilon u} x\, dF(x) \tag{V.132}$$

expression analogue à celle étudiée (V.106). On prendra λ avec $\alpha < \lambda < 1$ et on montrera de façon analogue que $K < H_o\, \epsilon^{1-\lambda}$.

d) Etude $n \int_{Aa_n}^{+\infty}$:

$$n \left| \int_{Aa_n}^{+\infty} \right| \leqq 2n\ (1 - F(a_n A)) \tag{V.133}$$

qui peut être pris pour A assez grand, aussi petit qu'on veut (voir a).

e) Etude de $n \int_{\epsilon a_n}^{Aa_n} \left[e^{it\frac{x}{a_n}} - 1 \right] dF(x)$:

En faisant le changement $x = a_n v$, et en intégrant par partie, il vient :

$$-{}_{\epsilon}^{A}[n(e^{itv} - 1)\ (1 - F(a_n v))] + n\, it \int_{\epsilon}^{A} e^{itv}\ (1 - F(a_n v))\ dv \tag{V.134}$$

Quand $n \longrightarrow \infty$, la limite de (V.134) est :

$$-{}_{\epsilon}^{A}\left[\frac{e^{itv} - 1}{v^{\alpha}}\right] - it \int_{\epsilon}^{A} e^{itv} \frac{dv}{v^{\alpha}} \tag{V.135}$$

On en conclut, en faisant $A \longrightarrow +\infty$ et $\varepsilon \longrightarrow 0$ (car on voit aisément que la partie toute intégrée tend vers 0) que du fait de a) b) c) d) :

$$\underline{\lim_{u \to \infty} n I_1 = it \int_0^{+\infty} e^{itv} \frac{dv}{v^{\alpha}}} \tag{V.136}$$

(loi de PAUL LEVY).

Quant à $n I_2$ et $n I_3$, limites et conclusions sont les mêmes qu'au paragraphe précédent.

V.5.3 - Le cas transitoire $\alpha = 1$

On choisit toujours $\xi_n = a_n$, mais on laisse η_n ; nous devons étudier :

$$n I_1 = n \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\exp\left(it\left(\frac{x}{a_n} - \frac{\eta_n}{n}\right)\right) - 1 \right] dF(x) \tag{V.137}$$

On fait le même partage qu'en V.5.2 où les résultats de a) b) d) restent valables. Il reste à étudier :

$$n \int_0^{\epsilon a_n} \quad \text{et} \quad n \int_{\epsilon a_n}^{A a_n}$$

a) Etude de $n \int_0^{\epsilon a_n}$:

On peut écrire cette intégrale sous la forme :

$$\frac{n}{a_n} it \int_0^{\epsilon a_n} e^{it\left(\frac{\theta}{a_n} - \frac{\eta_n}{n}\right)} x \, dF(x) - \eta_n it \int_0^{\epsilon a_n} e^{it\left(\frac{\theta}{a_n} - \frac{\eta_n}{n}\right)} dF(x) \qquad (V.138)$$

où $0 < \theta < \epsilon a_n$.

On peut appliquer à la partie réelle et à la partie imaginaire de chacune des intégrales de (V.138), le théorème de la moyenne, à condition de prendre ϵ assez petit ($|t| < T$) et n assez grand pour que :

$$\sin \left[t \left(\frac{\theta}{a_n} - \frac{\eta_n}{n} \right) \right]$$

et :

$$\cos \left[t \left(\frac{\theta}{a_n} - \frac{\eta_n}{n} \right) \right]$$

gardent un signe constant ; on sait alors que (V.138) est égal à :

$$\frac{n}{a_n} it \, (1 + p(n, \epsilon)) \int_0^{\epsilon a_n} x \, dF(x) - \eta_n it \, (F(\epsilon a_n) - F(0)) \, (1 + q(n, \epsilon)) \qquad (V.139)$$

où :

$$\begin{aligned} |p(n, \epsilon)| &< p'(\epsilon) \\ |q(n, \epsilon)| &< q'(\epsilon) \end{aligned} \qquad (V.140)$$

$p'(\epsilon)$ et $q'(\epsilon)$ tendent vers 0 avec un ordre au moins aussi fort que ϵ.

Si on choisit η_n par :

$$\eta_n = \frac{1 + p(n, \epsilon)}{1 + q(n, \epsilon)} \frac{n}{a_n} \frac{\int_0^{a_n} x \, dF(x)}{F(\epsilon a_n) - F(0)} \qquad (V.141)$$

(V.139) peut s'écrire :

$$-\frac{n}{a_n} it \, (1 + p(n, \epsilon)) \int_{\epsilon a_n}^{a_n} x \, dF(x) \qquad (V.142)$$

Le choix de η_n est valable, car $\eta_n / n \longrightarrow 0$; en effet :

$$\frac{\eta_n}{n} \sim \frac{1}{1 - F(0)} \frac{1}{a_n} \int_0^{a_n} x \, dF(x) < \frac{1}{1 - F(0)} (a_n)^{\theta - 1} \int_0^{\infty} x^{1-\theta} \, dF(x) \qquad (V.143)$$

en prenant $0 < \theta < 1$, l'intégrale est convergente et $(a_n)^{\theta - 1} \longrightarrow 0$.

Cherchons maintenant la limite de (V.142) en écrivant :

$$\frac{n}{a_n} \int_{\epsilon a_n}^{a_n} x \, dF(x) = n \int_{\epsilon}^{1} v \, dF(a_n v) = -\frac{1}{\epsilon} [n(1 - F(a_n v)) v] + n \int_{\epsilon}^{1} (1 - F(a_n v)) \, dv \qquad (V.144)$$

Comme pour $v > \epsilon$, $n(1 - F(a_n v)) \xrightarrow[u]{} \frac{1}{v}$, on voit que la limite cherchée de (V.144) est :

$$\underline{- \log \epsilon}$$

b) Etude de $\int_{a_n\epsilon}^{A_n\epsilon}$:

En changeant de variable et en intégrant par parties, il vient quand $n \longrightarrow \infty$.

$$\left[\frac{e^{itv} - 1}{v}\right]_{\epsilon}^{A} + it \int_{\epsilon}^{A} e^{itv} \frac{dv}{v} \tag{V.145}$$

Le comportement de $n I_1$ est donc le même quand $n \longrightarrow \infty$ que celui de :

$$\frac{e^{itA} - 1}{A} - \frac{e^{it\epsilon} - 1}{\epsilon} + it \int_{\epsilon}^{A} e^{itv} \frac{dv}{v} + (1 + p(n, \epsilon))\, it \log \epsilon \tag{V.146}$$

d'après a) et b). Comme :

$$it \int_{\epsilon}^{A} e^{itv} \frac{dv}{v} = it \int_{\epsilon}^{1} \frac{e^{itv} - 1}{v}\, dv - it \log \epsilon + it \int_{1}^{A} e^{itv} \frac{dv}{v}$$

on voit en prenant A aussi grand et ϵ aussi petit qu'on veut que ($|p(n, \epsilon) \cdot \log \epsilon| < \log \epsilon$) :

$$\lim_{n \to \infty} n I_1 = it \int_{0}^{1} \frac{e^{itv} - 1}{v}\, dv - it + it \int_{1}^{+\infty} e^{it} \frac{dv}{v} \tag{V.148}$$

On trouve une forme de la loi de PAUL LEVY relative à $\alpha = 1$. Pour le vérifier considérons une expression classique de la deuxième fonction caractéristique :

$$J = \int_{0}^{\infty} \left(e^{itu} - 1 \frac{it\, u}{1 + u^2}\right) \frac{du}{u^2} \tag{V.149}$$

On a en effet :

$$J = \int_{0}^{1} (e^{itu} - 1 - it\, u) \frac{du}{u^2} + it \int_{0}^{1} \frac{udu}{1 + u^2} + \int_{1}^{\infty} (e^{itu} - 1) \frac{du}{u^2} - it \int_{1}^{\infty} \frac{du}{u(1 + u^2)} \tag{V.150}$$

En posant $u = \frac{1}{v}$, on voit que :

$$- it \int_{1}^{\infty} \frac{du}{u(1 + u)} = - it \int_{0}^{1} \frac{vdv}{1 + v^2} \tag{V.151}$$

le résultat s'obtient en intégrant par parties les deux autres intégrales.

Les limites de $n I_2$ et $n I_3$ sont les mêmes qu'au paragraphe précédent.

THEOREME V.3 - Si les valeurs extrêmes ont des lois limites du type Φ_α (avec $\alpha < 2$) pour la plus grande valeur Y et Ψ', Λ' ou $\Phi'_\beta (\beta > \alpha)$ pour la plus petite Z_n, Y_n est légalement asymptotiquement liée à la moyenne M_n, Z_n étant légalement asymptotiquement indépendante de M_n et Y_n. Les lois-limites de la moyenne sont les lois de PAUL LEVY.

V.6 - LE CAS DOUTEUX $\alpha = \beta < 2$ ($L = \Phi_\alpha$, $L' = \Phi'_\alpha$)

V.6.1 - La liaison limite

Nous avons supposé $\alpha < \beta$, le cas $\alpha > \beta$ étant symétrique. Il convient d'examiner maintenant le cas $\alpha = \beta$. Pour cela supposons que $\frac{\alpha_n}{a_n}$ admet une limite $\lambda > 0$ finie. Prenons $\xi_n = a_n$; on peut toujours appliquer les résultats précédents à $n I_1$ (voir V.65) en partageant le champ d'intégration en $]-\infty, 0[$ et $[0, +\infty[$ on obtient ainsi les formes générales des lois de PAUL LEVY. De plus $\frac{a_n}{\xi_n} = 1$, et $\frac{\alpha_n}{\xi_n} \longrightarrow \lambda$, donc :

$$\lim n I_2 = \alpha \int_{-\infty}^{z} [e^{it\lambda v} - 1] \frac{dv}{v^{\alpha+1}} \qquad (V.152)$$

$$\lim n I_3 = \alpha \int_{y}^{+\infty} [e^{itv} - 1] \frac{dv}{v^{\alpha+1}} \qquad (V.153)$$

Remarquons que si $\lambda = 0$, $\lim n I_2 = 0$; si $\lambda = \infty$, on prend $\xi_n = \alpha_n$, et alors $\lim n I_3 = 0$.

Si $\frac{\alpha_n}{a_n}$ n'a aucune limite, on pourra extraire deux suites :

$$\frac{\alpha_{n_i}}{a_{n_i}} \longrightarrow \lambda_1 , \quad \frac{\alpha_{n_j}}{a_{n_j}} \longrightarrow \lambda_2 \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \qquad (V.154)$$

conduisant à deux lois limites différentes : la moyenne n'a pas de loi-limite. Nous donnerons des exemples sur tous ces cas.

On peut donc conclure ainsi :

THEOREME V.4 - Si les valeurs extrêmes admettent chacune une loi limite de type respectif Φ_α et Φ'_α, il faut et il suffit que $\frac{F^{-1}(1 - 1/n)}{F^{-1}(1/n)}$ ait une limite pour que la moyenne ait une loi limite (qui est la loi de PAUL LEVY). Pour que le triplet moyenne, valeurs extrêmes soit dans son ensemble légalement asymptotiquement indépendant, il faut et il suffit que $\frac{F^{-1}(1 - 1/n)}{F^{-1}(1/n)}$ ait une limite finie non nulle.

V.6.2 - Exemples de limites possibles pour $\frac{F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{F^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)}$

Le cas où $\lambda = 0$ ou l'infini est facile à construire. Par exemple :

$$F(x) = \frac{1}{(-x)^\alpha} \quad x \leqq -2$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \qquad -2 < x \leqq 2$$

$$F(x) = 1 - \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta} \quad (x > 2)$$

$$L' = \Phi'_\alpha \; ; \; L = \Phi_\alpha \quad \text{car} \quad \frac{1 - F(x)}{1 - F(kx)} = k^\alpha \left(\frac{\log kx}{\log x}\right)^\beta \longrightarrow k^\alpha$$

Enfin $\frac{\alpha_n}{a_n} = (\log a_n)^{\frac{\beta}{\alpha}}$ a pour limite ∞, 1 ou 0 suivant $\beta \gtreqless 0$.

Il est en revanche nettement plus délicat de trouver un exemple où $\frac{\alpha_n}{a_n}$ n'a aucune limite. Nous proposons l'exemple suivant :

$$F(x) = F_1(x) = 1 - \frac{1}{x^\alpha} (\log x)^{\sin \log_2 x} \quad \text{pour} \quad x > x_0$$

($\log_2 x = \log (\log x)$), x_0 étant assez grand (voir plus loin). Pour $x \leqq -x_0$, $F(x) = F_2(x) = \frac{a}{|x|^\alpha}$, avec $a < x_0^\alpha \; F_1(x_0)$. Pour $-x_0 < x \leqq x_0$ $F = F_3(x) = \frac{a}{|x_0|^\alpha}$.

Nous allons d'abord montrer qu'il s'agit d'une vraie fonction de répartition. F(x) est continue à gauche, $F(+\infty) = 1$, $F(-\infty) = 0$; il suffit donc de montrer que F(x) est croissante ; il suffit de voir sur $F_1(x)$, donc que :

$$y = \log(1 - F_1(x)) = \log_2 x \sin \log_2 x - \alpha \log x$$

est décroissante pour $x > x_0$. En effet,

$$y' = \frac{\log_2 x \cos \log_2 x}{x \log x} + \frac{\sin \log_2 x}{x \log x} - \frac{\alpha}{x}$$

Pour x assez grand $\frac{\alpha}{x}$ l'emporte, d'où le résultat.

Il faut maintenant montrer que $L = \Phi_\alpha$ et $L' = \Phi'_\alpha$; le deuxième résultat est évident ; pour le premier, comme on a :

$$\frac{1 - F(kx)}{1 - F(x)} = k^{-\alpha} \left[\frac{(\log kx) \sin \log_2 kx}{(\log x) \sin \log_2 x} \right] = k^{-\alpha} \; u$$

il suffit de montrer que $u \longrightarrow 1$, donc que :

$$\log u = (\sin \log_2 kx) \log_2 kx - (\sin \log_2 x) \log_2 x \longrightarrow 0$$

après un certain nombre de développements limités (voir le détail dans [19]) on voit que :

$$\log u \sim - \log k \, (\sin \log_2 x) \frac{\log x}{2 (\log x)^2} + \log k \, (\cos \log_2 x) \frac{\log_2 x}{\log x}$$

qui tend vers 0.

Etudions maintenant $\frac{a_n}{\alpha_n}$; nous allons supposer que $\frac{a_n}{\alpha_n} \neq 0$ et montrer qu'on a une contradiction.

On a en effet $\alpha_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$ donc $a_n = n^{\frac{1}{\alpha}} \lambda (1 + \varepsilon_n)$ ($\varepsilon_n \longrightarrow 0$). Comme a_n est défini par $n(1 - F(a_n)) = 1$, on a :

$$\frac{1}{\lambda^\alpha (1 + \varepsilon_n)^\alpha} \left(\log n^{\frac{1}{\alpha}} \lambda (1 + \varepsilon_n) \right)^{\sin \log_2 \left(n^{\frac{1}{\alpha}} \lambda (1 + \varepsilon_n) \right)} = 1$$

Quand $n \longrightarrow \infty$, le membre de gauche n'a aucune limite ce qui est contradictoire ; si $\lambda = 0$ ou si $\lambda = \infty$ ce membre tend vers 0 ou l'infini, et il y a encore contradiction. Ainsi a_n/α_n n'a aucune limite.

Cet exemple s'interprète qualitativement en notant que la densité de probabilité correspondant aux x grands est constituée par des arches de plus en plus grandes.

ANNEXE

SUR LA GÉNÉRALISATION DES DÉFINITIONS DE L'INDÉPENDANCE ASYMPTOTIQUE

- INTRODUCTION

La notion d'indépendance peut être donnée dans le cadre de la théorie des espaces mesurables ; or l'idée d'indépendance asymptotique fait intervenir la notion de distance de deux lois (voir GEFFROY [7]) ; cette distance a été définie par HENNEQUIN-TORTRAT [11](1) pour des lois de variables aléatoires à valeurs dans des espaces métriques ; nous nous placerons dans ce cas pour généraliser les définitions de l'indépendance asymptotique.

- NOTATIONS ET DEFINITIONS

Etant donné un espace métrique $\mathcal{X}$ et $A \subset \mathcal{X}$, la distance d de x à A est par définition :

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y) \tag{1}$$

η étant donné positif, nous définirons le sous-ensemble ouvert A^η par :

$$A^\eta = \{x : d(x, A) < \eta\}. \tag{2}$$

Distance ρ de deux lois μ et μ' :

Soient X et X' deux variables aléatoires à valeurs dans un espace métrique mesurable $\mathcal{X}$, muni d'une tribu, $\mathcal{B}$, et d'une distance d. Soient μ et μ' les lois de probabilités (ou mesures bornées) relatives à X et X'.

Définition – On appelle distance $\rho(\mu, \mu')$ de deux lois μ et μ' la borne inférieure des η tels que pour tout fermé F de la tribu $\mathcal{B}$ on ait :

$$\mu(F) < \mu'(F^\eta) + \eta \tag{3}$$

$$\mu'(F) < \mu(F^\eta) + \eta \tag{4}$$

On vérifie en [11] que $\rho(\mu, \mu')$ est bien une distance. Cette distance constitue une généralisation de la distance introduite par PAUL LEVY pour des lois à une variable (dans R) et généralisée pour des lois de R^2 par GEFFROY [7].

Définition générale de l'indépendance asymptotique globale

La distance ρ va nous permettre de généraliser la définition proposée par GEFFROY [7].

Soient $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ deux espaces métriques mesurables munis des tribus $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ et des distances d_1 et d_2.

Soit $\mathcal{X}$ l'espace produit de $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$, $\mathcal{B}$ la tribu produit de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. On peut considérer $\mathcal{X}$ comme un espace métrique muni par exemple de la distance :

---

(1) P. 291.

$$d(x, y) = \mathrm{Max}(d(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)) \tag{5}$$

$$x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2).$$

Soit $X_n = (X_n^1, X_n^2)$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathfrak{X}$; la loi de X_n est μ_n et celles de X_n^1 et X_n^2 sont respectivement μ_n^1 et μ_n^2.

Définition - On dira que X_n^1 et X_n^2 sont asymptotiquement globalement indépendantes si la distance $\rho(\mu_n, \mu_n^1 \times \mu_n^2)$ tend vers 0 avec $1/n$.

Dans la suite nous poserons :

$$\mu_n' = \mu_n^1 \times \mu_n^2$$

Remarque

L'indépendance limite uniforme dont la définition s'applique à R^n (voir chapitre I) est plus forte que l'indépendance définie ici ; cependant sa généralisation n'est pas possible car l'indépendance limite uniforme est fondée étroitement sur la fonction de répartition.

Nous renvoyons à LOEVE [15](1) pour cette définition.

Définition générale de l'indépendance asymptotique stricte en probabilité

Considérons les variables aléatoires X_n^1 et X_n^2 définies plus haut.

On doit définir d'abord la notion de loi conditionnelle (ou liée) $\mu_n^c(x_n^1, S_2)$ de X_n^2 par rapport à $X_n^1 = x_n^1$; elle est définie à un ensemble de $\mathfrak{X}_1$ de mesure nulle près par :

$$\mu_n(S_1 \times S_2) = \int_{S_1} \mu_n^1(dx_n^1)\, \mu_n^c(x_n^1, S_2) \tag{6}$$

$$(S_1 \in \mathcal{B}_1,\ S_2 \in \mathcal{B}_2,\ S_1 \times S_2 \in \mathcal{B}).$$

Définition - On dit que X_n^2 est asymptotiquement strictement indépendant de X_n^1 en probabilité si la distance $\rho(x_n^1)$ entre la loi liée de X_n^2 par rapport à $X_n^1 = x_n^1$, soit μ_n^c, et la loi marginale de X_n^2 soit μ_2, tend vers 0 en probabilité.

Nous généraliserons ainsi la définition donnée par GEFFROY [7]. Il ne nous reste plus qu'à généraliser le théorème 58 [7].

THEOREME - L'indépendance asymptotique stricte en probabilité de X_n^2 vis-à-vis de X_n^1 entraîne l'indépendance asymptotique globale de X_n^1 et X_n^2.

DEMONSTRATION - Soit E l'ensemble des valeurs de x_1^n telles que :

$$\rho(x_n^1) < \varepsilon \tag{7}$$

où ε est donné positif.

Par hypothèse, il existe n_ϵ tel que pour $n > n_\epsilon$:

$$\mu_n^1(E_n) > 1 - \varepsilon \tag{8}$$

Soit un fermé $F \in \mathcal{B}$; alors il existe deux fermés F_1 et F_2 tels que $F = F_1 \times F_2$ (voir par exemple (2) ; alors $F_1 \in \mathcal{B}$, et $F_2 \in \mathcal{B}_2$; on a d'après (6) :

$$\mu_n(F) = \mu_n(F_1 \times F_2) = \int_{F_1} \mu_n^1(dx_1)\, \mu_n^c(x_1, F_2) \tag{9}$$

donc :

$$\mu_n(F) = \int_{F_1 \cap E_n} \mu_n^1(dx_1)\, \mu_n^c(x_1, F_2) + \int_{E_1 \cap (x_1 - \varepsilon_n)} \mu_n^1(dx_1)\, \mu_n^c(x_1, F_2) \tag{10}$$

---

(1) P. 364.

(2) J. DIEUDONNE - Fondements de l'Analyse Moderne - Gauthier-Villars 1963.

De (7) et de la définition de ρ (inégalité (3)), on déduit que :

$$\mu_n^c(x_n^1,\ F_2) < \mu_n^2(F_2^\epsilon) + \varepsilon \tag{11}$$

Ainsi la première intégrale du second membre de (10) est majorée par :

$$(\varepsilon + \mu_n^2(F_2^\epsilon))\ \mu_n^1(F_1 \cap E_n) < \mu_n^1(F_1)\ \ {}^2_n(F_2^\epsilon) + \varepsilon \tag{12}$$

or :

$$\mu_n^1(F_1)\,\mu_n^2(F_2^\epsilon) = \mu_n'(F_1 \times F_2^\epsilon) < \mu_n'[(F_1 \times F_2)^\epsilon] = \mu_n'(F^\epsilon) \tag{13}$$

L'inégalité de (13) se démontre facilement en vérifiant que :

$$F_1 \times F_2^\epsilon \subset (F_1 \times F_2)^\epsilon$$

En effet si $x \in F_1 \times F_2^\epsilon$,

$$d(x,\ F_1 \times F_2) = \inf_{y \in F_1 \times F_2} d(x,\ y) \tag{14}$$

$$= \inf_{\substack{y_1 \in F_1 \\ y_2 \in F_2}} \mathrm{Max}(d(x_1,\ y_1),\ d(x_2,\ y_2)) \tag{15}$$

Comme $x_1 \in F_1$, on peut prendre $y_1 = x_1$ et alors :

$$d(x,\ F_1 \times F_2) \leqq \inf_{y_2 \in F_2} d(x_2,\ y_2) = d(x_2,\ F_2) < \epsilon \tag{16}$$

puisque $x_2 \in F_2^\epsilon$.

Ainsi $x \in (F_1 \times F_2)^\epsilon$, d'où le résultat.

La première intégrale de (10) est donc majorée par :

$$\mu_n'(F^\epsilon) + \varepsilon \tag{17}$$

Quant à la deuxième intégrale de (10), elle est majorée par :

$$\mu_n^1(F_1 \cap (\mathcal{X}_1 - E_n)) \leqq \mu_n^1(\mathcal{X}_1 - E_n) < \varepsilon \tag{18}$$

Ainsi :

$$\mu_n(F) < \mu_n'(F^\epsilon) + 2\varepsilon \leqq \mu_n'(F^{2\epsilon}) + 2\varepsilon \tag{19}$$

On montrerait de même que :

$$\mu_n'(F) < \mu_n(F^{2\epsilon}) + 2\varepsilon \tag{19 bis}$$

et cela pour tout fermé $F \in \mathcal{B}$; on a donc $\rho(\mu_n,\ \mu_n') < 2\varepsilon$ pour $n > n_\epsilon$: le théorème est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AROV A.Z. et BOBROV A.A. - The extreme terms of a sample and their role in the sum of independant variables (Theory of probability and its applications. Vol. V n° 4, 1960 - Cette revue est la traduction de la revue russe : Teoriya Veroyatnostei i ee Primeneniya).

[2] BASTENAIRE F. - Etude statistique et physique de la dispersion des résistances et endurances à la fatigue.
Thèse Paris 1960.

[3] BERMAN S.M. - The asymptotic independance of the sample Quantile and the sample extreme value.
Tech. Rep. T. 22 Dep. of Ind. and Manag. Eng. Columbia Univ. 1961.

[4] CRAMER H. - Mathematical methods of statistics.
Princeton 1946.

[5] DARLING D.A. - The role of the maximal term in the sum of independant random variables Trans. Amer. Math. Soc. 73, 1952.

[6] DUGUE D. - Traité de statistique théorique et appliquée 1er Fasc. Analyse aléatoire - Masson, 1958.

[7] GEFFROY J. - Contribution à la théorie des valeurs extrêmes. Fasc. 3, 4, 1958 - Fasc. 1, 1959 - Revue de l'I.S.U.P. Paris.

[8] GNEDENKO B.V. - Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. (Ann. Math. Vol. 44, p. 433).

[9] GNEDENKO B.V., KOLMOGOROV A.N. - Limit distributions for sums of independent random variables. Addison Wesley Publishing Company, 1954.

[10] GUMBEL E.J. - Statistics of extremes.
Columbia Univ. Press. New-York, 1958.

[11] HENNEQUIN P.L. et TORTRAT A. - Théorie des probabilités et quelques applications. Masson, 1965.

[12] KHINTCHINE A. - Le domaine d'attraction de la loi de Gauss.
En italien : Giornale Dell'Istituto Italiano degli Attuari 6, 1935.

[13] KREM A. - On the Independance in the limit of extrems and central order statistics.
A. Magyar tudo. Akad. Mat. Kutatô. Int Közl. Publication de l'Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences de Hongrie. 1963, p. 469 et suivantes.

[14] LEVY P - Théorie de l'addition des variables aléatoires.
Monographies des Probabilités. Gauthier Villars, 1937.

[15] LOEVE M. - Probability theory.
Van Nostrand Company, éd. 1963.

[16] LUKACS - Fonctions caractéristiques.
Dunod, 1964.

[17] MOSTELLER - On some useful inefficient statistics.
Ann. Math. Stat. 1946, vol. 17, p. 371-408.

[18] ROSSBERG H.J. - Über das asymptotische verhalten der Rand und Zentralglieder einer Variationsreil .
Publication d l'Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences de Hongrie, 1963, p. 463.

[19] ROSENGARD A. - Etude des lois limites jointes et marginales de la moyenne et des valeurs extrêmes d'un échantillon.
Thèse de 3ème Cycle, Fasc. 1, 1962. Revue de l'I.S.U.P. Paris.

[20] ROSENGARD A. - Indépendance limite uniforme de la moyenne et des valeurs extrêmes d'un échantillon.
Comptes-rendus, 258, 1964, p. 57-83.

[21] ROSENGARD A. - Loi limite jointe d'un quantile et de la moyenne d'un échantillon.
Comptes rendus, 259, 1964, p. 2759.

[22] ROSENGARD A. - Indépendance limite uniforme d'un quantile et des valeurs extrêmes d'un échantillon.
Comptes rendus, 259, 1964, p. 2955.

[23] SMIRNOV N. - Uber die verteilung das allgemeinen gliedes in der variationsreihe.
Metron. Vol. 12, 1935.

[24] TIAGO DE OLIVEIRA J. - The asymptotic independance of the mean and the extreme values.
Instituto de Alta Cultura, Lisbonne, 1962.

[25] TITCHMARSH - The theory of functions.
Oxford University Press, 1958.

[26] WILKS S.S. - Orders Statistics.
Bull. Ann. Math. Soc. Vol. 54, n° 1, p. 6 à 50, 1948.

Manuscrit reçu le 10.12.1965

TABLE DES MATIÈRES

Pages

CHAPITRE I - GENERALITES SUR L'INDEPENDANCE ASYMPTOTIQUE 5

I.1 - Loi limite et indépendance asymptotique légale 5

I.2 - L'indépendance asymptotique uniforme 6

I.3 - L'indépendance asymptotique stricte en probabilité 12

I.4 - L'indépendance asymptotique presque complète 17

CHAPITRE II - LIAISONS ET INDEPENDANCES LIMITES ENTRE STATISTIQUES D'ORDRE. 19

II.1 - Rappel de résultats relatifs aux statistiques d'ordre 19

II.2 - Etude asymptotique de la liaison entre X_r^* et X_r^*. 21

CHAPITRE III - ETUDE DE L'INDEPENDANCE LIMITE DE LA MOYENNE PAR RAPPORT AUX VALEURS EXTREMES D'UN ECHANTILLON 31

III.1 - Indépendance limite en probabilité de la moyenne par rapport aux valeurs extrêmes 31

III.2 - Indépendance limite presque complète de la moyenne par rapport aux valeurs extrêmes 36

CHAPITRE IV - LIAISON LIMITE ENTRE LA MOYENNE ET UN QUANTILE 41

IV.1 - Loi limite jointe du quantile et de la moyenne quand la variance de la distribution initiale est bornée 41

IV.2 - Indépendance limite stricte en probabilité de la moyenne par rapport au quantile quand la variance est infinie 47

CHAPITRE V - LES DIFFERENTES FORMES LIMITES DE LA LOI JOINTE DES VALEURS EXTREMES ET DE LA MOYENNE ET L'INFLUENCE DES LOIS LIMITES MARGINALES DES EXTREMES SUR LA LOI LIMITE DE LA MOYENNE .. 53

V.1 - Hypothèses de départ 53

V.2 - Démonstration de quelques lemmes 55

V.3 - La loi du triplet S_n, Y_n, Z_n et la classification de ses lois limites 61

V.4 - Indépendance limite légale de la moyenne et des valeurs extrêmes 64

V.5 - Cas où la moyenne n'est asymptotiquement légalement indépendante que d'une seule des valeurs extrêmes 67

V.6 - Le cas douteux 74

ANNEXE - SUR LA GENERALISATION DES DEFINITIONS DE L'INDEPENDANCE ASYMPTOTIQUE 77

BIBLIOGRAPHIE 81

Manuscrit reçu le 10.12.1965

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

"APPROXIMATION LINEARISEE DES MOUVEMENTS SUPERSONIQUES CONIQUES"

Vu et approuvé :
Paris, le 22 février 1966
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
Marc. ZAMANSKY

Vu
et Permis d'imprimer :
Le Recteur de l'Académie
de Paris,
Jean ROCHE

IMPRIMERIE LOUIS-JEAN
Ouvrages scientifiques
TYPO-OFFSET
GAP (Hautes-Alpes)
Dépôt légal n° 228
1966